УДК 517.95

Научная статья

Краевая задача со смещением для гиперболического уравнения третьего порядка с производной в граничных условиях

Р. Х. Макаова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
E-mail: makaova.ruzanna@mail.ru

В работе исследована краевая задача со смещением для гиперболического уравнения третьего порядка, которая содержит производную в граничных условиях. Доказана теорема единственности и существования регулярного решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: краевая задача со смещением, уравнения гиперболического типа, уравнение Аллера.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-38-44

Поступила в редакцию: 08.10.2021

В окончательном варианте: 12.11.2021

Для цитирования. Макаова Р. Х. Краевая задача со смещением для гиперболического уравнения третьего порядка с производной в граничных условиях // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 37. № 4. С. 38-44. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-38-44

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Макаова Р. Х., 2021

Введение

В евклидовой плоскости точек (x, y) рассматривается уравнение вида

$$0 = \begin{cases} u_y - au_{xx} - bu_{xy}, & y > 0, \\ u_{yy} - c^2 u_{xx}, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где a , b и c – заданные положительные числа; $u = u(x, y)$ – искомая действительная функция независимых переменных x и y .

Уравнение (1) при $y > 0$ совпадает с уравнением Аллера [1]

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right), \quad (2)$$

а при $y < 0$ – с волновым уравнением

$$u_{yy} - c^2 u_{xx} = 0. \quad (3)$$

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Уравнение (2) относят к уравнениям псевдопараболического типа [2], хотя является уравнением гиперболического типа. Известно [3], что при определенных допущениях уравнение (2) описывает движение почвенной влаги и его решение интерпретируется как влажность почвы с коэффициентом диффузии a и коэффициентом влагопроводности b в точке x почвенного слоя $0 \leq x \leq r$ в момент времени $y \in [0, T]$. Исследованию различных краевых задач для уравнений третьего порядка псевдопараболического типа, в частности, и для уравнения Аллера посвящены работы [4] - [9].

В настоящее время исследованию краевых задач со смещением для различных типов и порядков уравнений посвящены немало работ. В работах [10], [11], А.М. Нахушевым было введено понятие краевой задачи со смещением для гиперболических, вырождающихся гиперболических и смешанного типа уравнений. Задача со смещением с производной в граничных условиях для уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка исследовано в работе [12]. Более полную библиографию научных работ, посвященных исследованию краевых задач со смещениями приведены в монографиях [13], [14].

В данной работе исследуется краевая задача со смещением для гиперболического уравнения третьего порядка с оператором Аллера в главной части.

Постановка задачи и полученный результат

Пусть $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \cup (A_0 A_r)$, где $\Omega^+ = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$, $A_0 A_r = \{(x, 0) : 0 < x < r\}$, а Ω^- - область, ограниченная характеристиками $A_0 C : x + cy = 0$, $A_r C : x - cy = r$ волнового уравнения (3) при $y < 0$, выходящими из точек $A_0 = (0, 0)$, $A_r = (r, 0)$ и пересекающимися в точке $C = (\frac{r}{2}, -\frac{r}{2c})$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ такую, что $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^-)$, $u_{xx}, u_{xy} \in C(\Omega^+)$ и удовлетворяющую уравнению (1).

Исследуется следующая

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим условиям:

$$u(0, y) = 0, \quad u_x(r, y) = 0, \quad 0 \leq y < T, \quad (4)$$

$$\alpha(x) \frac{d}{dx} u[\Theta_0(x)] + \beta(x) \frac{d}{dx} u[\Theta_r(x)] = \delta(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (5)$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\delta(x)$ – заданные функции. Здесь $\Theta_0(x) = (\frac{x}{2}, -\frac{x}{2c})$, $\Theta_r(x) = (\frac{x+r}{2}, \frac{x-r}{2c})$ - аффиксы точек пересечения характеристик волнового уравнения (3), выходящих из точки $(x, 0)$ с характеристиками $A_0 C$, $A_r C$.

Справедлива следующая

Теорема. Пусть относительно заданных функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\delta(x)$ выполнены условия

$$\alpha(x), \beta(x) \in C^1[0, r] \cap C^3(0, r), \delta(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r); \quad (6)$$

$$\alpha(x) \neq \pm \beta(x) \quad \forall x \in [0, r], \quad (7)$$

и пусть

$$\frac{\alpha(0) + \beta(0)}{\alpha(0) - \beta(0)} \geq 0, \quad \left[\frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \right]' \geq 0. \quad (8)$$

Тогда существует единственное регулярное в области Ω решение задачи (4), (5) для уравнения (1).

Доказательство. Сначала покажем единственность, для этого положим

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (9)$$

$$u_y(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < r. \quad (10)$$

Из (2), переходя к пределу при $y \rightarrow +0$, с учетом обозначений (9) и (10) находим фундаментальное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принесенное из области Ω^+ на линию $y = 0$ в виде

$$\psi(x) - a\varphi''(x) - b\psi''(x) = 0, \quad (11)$$

а из краевых условий (4) имеем, что

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(r) = 0; \quad (12)$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi'(r) = 0. \quad (13)$$

Далее найдем аналогичное фундаментальное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принесенное из области Ω^- на линию $y = 0$. Для этого воспользуемся представлением решения задачи Коши (9), (10) для уравнения (3), которое выписывается по формуле Даламбера

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x + cy) + \varphi(x - cy)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-cy}^{x+cy} \psi(\xi) d\xi. \quad (14)$$

Из (14) находим:

$$u[\Theta_0(x)] = \frac{\varphi(x) + \varphi(0)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(\xi) d\xi,$$

$$u[\Theta_r(x)] = \frac{\varphi(x) + \varphi(r)}{2} - \frac{1}{2c} \int_x^r \psi(\xi) d\xi,$$

откуда получаем, что

$$\frac{d}{dx} u[\Theta_0(x)] = \frac{\varphi'(x)}{2} - \frac{\psi(x)}{2c}, \quad \frac{d}{dx} u[\Theta_r(x)] = \frac{\varphi'(x)}{2} + \frac{\psi(x)}{2c}. \quad (15)$$

Из условия (5) с учетом (15) находим фундаментальное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принесенное из области Ω^- на линию $y = 0$ в виде

$$c[\alpha(x) + \beta(x)]\varphi'(x) - [\alpha(x) - \beta(x)]\psi(x) = 2c\delta(x). \quad (16)$$

Из (16) с учетом условия (7) имеем

$$\psi(x) = c \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \varphi'(x) - \frac{2c\delta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}. \quad (17)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^r \varphi''(x) \psi(x) dx.$$

Умножив на $\psi(x)$ и, проинтегрировав в пределах от 0 до r , из (11) при однородных краевых условиях (5) и (13), получим

$$I = \frac{1}{a} \int_0^r \psi^2(x) dx + \frac{b}{a} \int_0^r \psi'^2(x) dx \geq 0. \quad (18)$$

А из (17), умножив на $\varphi''(x)$ и проинтегрировав в пределах от 0 до r , с учетом условия (8), приходим к неравенству

$$I = -\frac{A(0)\varphi'^2(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^r A'(x) \varphi'^2(x) dx \leq 0, \quad (19)$$

где

$$A(x) = c \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}.$$

Из неравенств (18) и (19) следует, что $I = 0$, которое может иметь место в том и только в том случае, когда $\psi(x) = 0$. Тогда из (11) следует, что $\varphi''(x) = 0 \quad \forall x \in [0, r]$ и, следовательно, $\varphi(x) = C_1 + C_2 x$ ($C_1, C_2 = \text{const}$). С учетом однородных условий (12) заключаем, что $\varphi(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, r]$. Тогда в области Ω^+ приходим к смешанной краевой задаче (4), (9) для уравнения Аллера (2), решение которого выписывается в виде

$$u(x, y) = \int_0^r G(x, y; \xi, 0) [\varphi(\xi) - b\varphi''(\xi)] d\xi, \quad (20)$$

$$G(x, y; \xi, \eta) = \frac{2}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + b\mu_n} e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)} \sin(\sqrt{\mu_n}x) \sin(\sqrt{\mu_n}\xi), \quad \mu_n = \left(\pi \frac{2n-1}{2r} \right)^2.$$

Из представления (20) при $\varphi(x) \equiv 0$ получаем, что $u(x, y) \equiv 0$. А в области Ω^- из представления решения задачи Коши (14) при однородных условиях (9), (10) для уравнения (3) следует, что $u(x, y) \equiv 0$. Таким образом, показано, что однородная задача, соответствующая задаче (4) и (5) для уравнения (1), при выполнении условий теоремы имеет только тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0$ в области Ω , что говорит о единственности регулярного решения исследуемой задачи.

Далее перейдем к доказательству существования регулярного решения исследуемой задачи. Из (11) и (16) с учетом условия (7) приходим относительно функции $\psi(x)$ к следующему дифференциальному уравнению второго порядка с переменными коэффициентами

$$\psi''(x) + p(x)\psi'(x) + q(x)\psi(x) = f(x), \quad 0 < x < r, \quad (21)$$

$$p(x) = \frac{a}{bc} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x)}, \quad q(x) = \frac{a}{bc} \left[\frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right]', \quad f(x) = -\frac{2a}{b} \left[\frac{\delta(x)}{\alpha(x) + \beta(x)} \right]'.$$

Путем интегрирования уравнения (21) по x в пределах от 0 до x при $p(r) \neq \frac{1}{r}$ приходим к соответствующему задаче (21), (13) интегральному уравнению вида

$$\psi(x) = \int_0^r K(x, t) \psi(t) dt + g(x), \quad (22)$$

$$K(x, t) = \begin{cases} K_1(x, t), & 0 < x < t, \\ K_1(x, t) + K_2(x, t), & t < x < r, \end{cases}$$

$$K_1(x, t) = \frac{x[p'(t) - q(t)][1 - (r - t)p(r)]}{rp(r) - 1}, \quad K_2(x, t) = (x - t)[p'(t) - q(t)] - p(t),$$

$$g(x) = \int_0^r \frac{1 - (r - t)p(r)}{rp(r) - 1} x f(t) dt + \int_0^x (x - t) f(t) dt.$$

Уравнение (22) представляет собой уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K(x, t) \in L_2([0, r] \times [0, r])$. Однозначная разрешимость уравнения (22) вытекает из единственности решения исследуемой задачи.

После того как функция $\psi(x)$ найдена, функцию $\varphi(x)$ легко найти из соотношений (11) или (16). Тогда решение исследуемой задачи в области Ω^+ находится по формуле (20), а в области Ω^- по формуле (14). Условия (6) обеспечивают регулярность найденного решения.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

1. Hallaire M. L'eau et la productions vegetable // *Institut National de la Recherche Agronomique*, 1964. Т. 9.
2. Showalter R. E., Ting T. W. Pseudoparabolic partial differential equations // *SIAM J. Math. Anal.*, 1970. Т. 1, № 1, С. 1–26.
3. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. shk., 1995. 301 с. [Nakhushev A. M. *Upravneniya matematicheskoy biologii*. М.: Vyssh. shk., 1995. 301 pp. (In Russian)]
4. Coleman B. D., Duffin R. J., Mizel V. J. Instability, Uniqueness, and Nonexistence Theorems for the Equation on a Strip // *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 1965. vol. 19, pp. 100–116.
5. Yangarber V. A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.*, 1967. vol. 8, no. 1, pp. 62–64.
6. Colton D. Pseudoparabolic Equations in One Space Variable // *Journal of Differ. Equations*, 1972. Т. 12, № 3, С. 559–565.
7. Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // *Дифференц. уравнения*, 1982. Т. 18, № 4, С. 689–699. [Shkhanukov M. H. O nekotoryh kraevykh zadachah dlya uravnenij tret'ego poryadka, vznikayushchih pri modelirovanii fil'tracii zhidkosti v poristykh sredah // *Differenc. uravneniya*, 1982. vol. 18, no. 4, pp. 689–699 (In Russian)].

8. Макаова Р. Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2015. Т. 17, № 3, С. 35–38. [Makaova R. Kh. Vtoraya kraevaya zadacha dlya obobshchennogo uravneniya Allera s drobnoy proizvodnoy Rimana–Liuvillya // *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoj akademii nauk*, 2015. vol. 17, no. 3, pp. 35–38 (In Russian)].
9. Макаова Р. Х. Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана - Лиувилля // *Вестник АГУ. Серия 4: Естественно-математические и технические науки*, 2017. Т. 4, № 211, С. 36–41. [Makaova R. Kh. Pervaya kraevaya zadacha v nelokal'noj postanovke dlya obobshchennogo uravneniya Allera s drobnoy proizvodnoy Rimana - Liuvillya // *Vestnik AGU. Seriya 4: Estestvenno-matematicheskie i tekhnicheskie nauki*, 2017. vol. 4, no. 211, pp. 36–41 (In Russian)].
10. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // *Дифференц. уравнения*, 1969. Т. 5, № 1, С. 44–59. [Nahushev A. M. O nekotoryh kraevykh zadachah dlya giperbolicheskikh uravnenij i uravnenij smeshannogo tipa // *Differenc. uravneniya*, 1969. vol. 5, no. 3, pp. 44–59 (In Russian)].
11. Нахушев А. М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // *Докл. АН СССР*, 1969. Т. 187, № 4, С. 736–739. [Nahushev A. M. Novaya kraevaya zadacha dlya odnogo vyrozhdayushchegosya giperbolicheskogo uravneniya // *Dokl. AN SSSR*, 1969. vol. 187, no. 4, pp. 736–739 (In Russian)].
12. Balkizov Zh. A. On a boundary value problem for a third-order parabolic-hyperbolic type equation with a displacement boundary condition in its hyperbolicity domain // *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.*, 2020. Т. 24, № 2, С. 211–225.
13. Репин О. А. *Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов*. Самара: Самар. фил. Саратов. ун-та, 1992. 161 с. [Repin O. A. *Kraevye zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij giperbolicheskogo i smeshannogo tipov*. Samara: Samar. fil. Sarat. un-ta, 1992. 161 pp. (In Russian)]
14. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука, 2006. 287 с. [Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij v chastnykh proizvodnyh*. M.: Nauka, 2006. 287 pp. (In Russian)]

MSC 35L25, 35L80

Research Article

Boundary value problem with a displacement for a hyperbolic equation of third order with a derivative under boundary conditions

R. Kh. Makaova

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360000,
89A Shortanova St., Nalchik, Russia
E-mail: makaova.ruzanna@mail.ru

The paper investigates a boundary value problem with a shift for a third-order hyperbolic equation, which contains a derivative in the boundary conditions. A uniqueness and existence theorem for a regular solution of the problem under study is proved.

Keywords: boundary value problem with displacement, hyperbolic equations, Hallaire equation.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-38-44

Original article submitted: 08.10.2021

Revision submitted: 12.11.2021

For citation. Makaova R. Kh. Boundary value problem with a displacement for a hyperbolic equation of third order with a derivative under boundary conditions. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2021, **37**: 4, 38-44. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-38-44

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Makaova R. Kh., 2021

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.