УДК 517.95 Научная статья

Внутреннекраевая задача с интегральным условием для уравнения дробной диффузии

Ф. М. Лосанова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, ул. Шортанова 89А, 360000, Кабардино-Балкарская республика
E-mail: losanovaf@gmail.com

В данной работе рассматривается нелокальная внутреннекраевая задача для уравнения дробной диффузии с оператором дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля с интегральными условиями. Исследуемая задача эквиваленто сведена к системе двух интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: уравнение дробной диффузиия, оператор Римана – Лиувилля, функция Грина, интегральное условие.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-24-29

Поступила в редакцию: 26.11.2021 В окончательном варианте: 15.12.2021

Для цитирования. Лосанова Ф. М. Внутреннекраевая задача с интегральным условием для уравнения дробной диффузии // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 37. № 4. С. 24-29. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-24-29

Введение

Операторы дробного интегро-дифференцирования [1] широко применяются при исследовании прикладных задач, изучающих математические модели физических и геофизических процессов во фрактальных средах.

Применение оператора дробного исчисления оказывает влияние на характер эволюции изучаемых процессов (скорость, ускорение ит. д.) не только в тот же момент времени, но и в последующие, т. е. в дифференциальных уравнениях. описывающих процесс с последействием, появляются члены с запаздыванием по времени y ([2], с. 383). В работе [3] можно увидеть обоснование новой парадигмы фрактальности, базирующейся на триаде: фракталы, дробные операторы, скайлинг, а в работе [4] оператору дробного дифференцирования придается вполне конкретный физический смысл.

В данной работе в области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < l, 0 < y < T\}$ рассматривается уравнение дробной диффузии вида

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

$$D_{0y}^{\alpha}u(x,\eta) - u_{xx}(x,y) = f(x,y), \tag{1}$$

где D_{0y}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α, определяемый следующим образом ([5], с. 28)

$$D_{0t}^{\alpha}u(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u(\eta)}{(t-\eta)^{\alpha+1}} d\eta, & \alpha < 0, \\ u(t), & \alpha = 0, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^p D_{0t}^{\alpha-p} u(\eta), & p-1 < \alpha \le p, \, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha < 1$.

Уравнение вида (1) были рассмотрены многими авторами, перчислим некоторые из них. В работе [6] была исследована задача Коши с регуляризованной дробной производной и эллиптическим оператором с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных. В работе [7] были построены фундаментальные решения диффузионных и диффузионно-волновых уравнений с производными Капуто и Римана-Лиувилля с помощью преобразования Лапласса и преобразования Фурье.

Для дробного уравнения диффузии вида (1) решены задача Коши и первая краевая задача в работах [8] и [9] методом редукции к системе уравнений меньшего порядка. Затем методом функции Грина построены решения основных краевых задач в прямоугольной области и решена задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с помощью фундаментального решения.

Автором для уравнения (1) найдено решение нелокальной краевой задачи с условием Самарского в полуполосе в работе [10], а в [11] решена задача с локальным смещением. Доказаны теоремы существования и единственности поставленных задач.

Наиболее полный список работ, посвященных уравнению вида (1) можно найти в работах [12]-[14].

В представленной работе решается внутреннекраевая задача для уравнения (1) с интегральными условиями.

2. Постановка задачи и основной результат

Введем понятие регулярного решения.

Решение $u = u(x,y)$ уравнения (1) назовем *регулярным* в области Ω, если выполнены условия $u(x,t), D_{0y}^{\alpha-1}u(x,\eta) \in C(\overline{\Omega})$, $u_{xx}(x,y), D_{0y}^{\alpha}u(x,\eta) \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y) \in \Omega$.

Ставится следующая

Задача. *Найти регулярное решение $u(x,)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1}u(x,\eta) = \tau(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,y) + \int\limits_0^l M(\xi,y)u(\xi,y)\,d\xi = \varphi(y), \quad 0 \le y \le T, \tag{3}$$

$$u(l,y)+\int\limits_0^l N(\xi,y)u(\xi,y)\,d\xi=\psi(y),\qquad 0\le y\le T,\tag{4}$$

где $\tau(x)$, $\varphi(y)$, $\psi(y)$ – заданные непрерывные функции.

В 1979 году А.М. Нахушевым была предложена задача для уравнения теплопроводности с внутреннекраевыми условиями вида (3), которое возникает при численной реализации на ЭВМ задачи Самарского [5].

Большую роль в развитие методов исследования нелокальных краевых и внутреннекраевых задач с условием (3) сыграли работы В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [15], [16], где была изучена нелокальная краевая задача первого рода в дифференциальной и разностной трактовках. Нелокальность первого рода проявляется вследствие того, что в граничном условии задается линейная комбинация значений искомой функции. Наиболее подробный анализ работ с условием (3) был проведен в Главе 2 [5].

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть $y^{1-\alpha}\psi(y),y^{1-\alpha}\varphi(y)\in C[0,T]$, $\tau(x)\in C[0,l]$, $y^{1-\alpha}f(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, $f(x,y)$ удовлетворяет условию Гёльдера по переменной x. Тогда существует единственное регулярное решение уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее граничным условиям (2)-(4).*

3. Доказательство теоремы

Известно, что решение первой краевой задачи для уравнения (1) с оператором Капуто, как следует из результатов работы ([13], стр. 99), имеет вид

$$u(x,y)=\int\limits_0^y u(0,\eta)G_\xi(x,y,0,\eta)d\eta-\int\limits_0^y u(l,\eta)G_\xi(x,y,l,\eta)d\eta+$$

$$+\int\limits_0^l \tau(\xi)G(x,y,\xi,0)d\xi-\int\limits_0^y\int\limits_0^l f(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta,\tag{5}$$

где

$$G(x,y,\xi,\eta)=\frac{(y-\eta)^{\beta-1}}{2}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x-\xi+2nl|}{(y-\eta)^\beta}\right)-e^{1,\beta}_{1,\beta}\left(-\frac{|x+\xi+2nl|}{(y-\eta)^\beta}\right)\right]$$

— функция Грина первой краевой задачи, $\beta=\alpha/2$,

$$e^{1,\mu}_{1,\rho}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!\Gamma(\mu-\rho n)}$$

— функция Райта ([13], стр. 23).

Удовлетворим функцию (5) условиям (3) и (4) и после несложных преобразований, получим

$$\begin{cases} u(0,y)+\int\limits_0^y u(0,\eta)K_1(y,\eta)d\eta-\int\limits_0^y u(l,\eta)K_2(y,\eta)d\eta=F_1(y), \\ u(l,y)-\int\limits_0^y u(l,\eta)K_3(y,\eta)d\eta+\int\limits_0^y u(0,\eta)K_4(y,\eta)d\eta=F_2(y), \end{cases} \tag{6}$$

где

$$F_1(y)=\varphi(y)-\int\limits_0^l M(\xi,y)\left[\int\limits_0^l \tau(\xi_1)G(xi,y,\xi_1,0)d\xi_1-\int\limits_0^y\int\limits_0^l f(\xi_1,\eta)\,G(xi,y,\xi_1,\eta)d\xi_1 d\eta\right]d\xi,$$

$$F_2(y)=\psi(y)-\int\limits_0^l N(\xi,y)\left[\int\limits_0^l \tau(\xi_1)G(xi,y,\xi_1,0)d\xi_1-\int\limits_0^y\int\limits_0^l f(\xi_1,\eta)\,G(xi,y,\xi_1,\eta)d\xi_1 d\eta\right]d\xi,$$

$$K_1(y,\eta)=\int\limits_0^l M(\xi,y)G_{\xi_1}(xi,y,0,\eta)d\xi, \qquad K_3(y,\eta)=\int\limits_0^l N(\xi,y)G_{\xi_1}(xi,y,l,\eta)d\xi,$$

$$K_2(y,\eta)=\int\limits_0^l M(\xi,y)G_{\xi_1}(xi,y,l,\eta)d\xi, \qquad K_4(y,\eta)=\int\limits_0^l N(\xi,y)G_{\xi_1}(xi,y,0,\eta)d\xi.$$

Система (6) является системой интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода с ядрами $K_i(y)$, где $|K_i(y)|\leq C(y-\eta)^{\beta\theta-1}$.

В силу [17]

$$|G_\xi(x,y,\xi,\eta)|\leq C(y-\eta)^{\beta\theta-1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(|x-\xi|+2nl)^\theta}+\frac{1}{(x+\xi+2nl)^\theta}\right], \tag{7}$$

заключаем, что система интегральных уравнений (6) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений ([18], с. 15). Теорема доказана.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответсвенность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 1995. 272 с. [Nakhushev A. M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye*. M.: Fizmatlit, 2003. 272 pp. (In Russian)]
2. Марри Дж. *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. Пер. с англ. В.Г. Бабского*. М.: Мир, 1983. 399 с. [Murray J. *Nelineynyye differentsial'nyye uravneniya v biologii. Lektsii o modelyakh. Per. s angl. V.G. Babskogo)*. M.: Mir, 1983. 399 pp. (In Russian)]
3. Потапов А. А. Фрактальный метод, фрактальная парадигма и метод дробных производных в естествознании // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2012. № 5(2), С. 172-180. [Potapov A. A. Fraktal'nyy metod, fraktal'naya paradigma i metod drobnykh proizvodnykh v yestestvoznanii // *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo*, 2012. no. 5(2), pp. 172-180 (In Russian)].
4. Рехвиашвили С. Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования // *Нелинейный мир*, 2007. Т. 5, № 4, С. 194-198. [Rekhviashvili S. Sh. K opredeleniyu fizicheskogo smysla drobnogo integro-differentsirovaniya // *Nelineynyy mir*, 2007. vol. 5, no. 4, pp. 194-198 (In Russian)].

5. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высш. шк., 1995. 301 с. [Nakhushev A. M. *Uravneniya matematicheskoy biologii*. M.: Vyssh. shk., 1995. 301 pp. (In Russian)]

6. Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // *Докл. РАН*, 2004. Т. 394, № 2, С. 159-161. [Kochubei A. N., Eidelman S. D. Zadacha Koshi dlya evolyutsionnykh uravneniy drobnogo poryadka // *Dokl. RAN*, 2004. vol. 394, no. 2, pp. 159-161 (In Russian)].

7. Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // *Chaos Solitons Fractals*, 1996. Т. 7, № 9, С. 1461-1477.

8. Псху А. В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // *Дифференциальные уравнения*, 2003. Т. 39, № 10, С. 1430-1433. [Pskhu A. V. Resheniye krayevykh zadach dlya uravneniya diffuzii drobnogo poryadka metodom funktsii Grina // *Differential Equations*, 2003. vol. 39, no. 10, pp. 1430-1433 (In Russian)].

9. Псху А.В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // *Дифференциальные уравнения*, 2003. Т. 39, № 9, С. 1286-1289. [Pskhu A. V. Resheniye pervoy krayevoy zadachi dlya uravneniya diffuzii drobnogo poryadka // *Differential Equations*, 2003. vol. 39, no. 9, pp. 1286-1289 (In Russian)].

10. Лосанова Ф. М. Задача с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015. № 2(11), С. 17-21. [Losanova F. M. Zadacha s usloviyem Samarskogo dlya uravneniya drobnoy diffuzii v polupolose // *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2015. no. 2(11), pp. 17-21 (In Russian)].

11. Лосанова Ф. М. Задача с локальным смещением для уравнения дробной диффузии // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2019. Т. 29, № 4, С. 28-34. [Losanova F. M. Zadacha s lokal'nym smeshcheniyem dlya uravneniya drobnoy diffuzii // *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2019. vol. 29, no. 4, pp. 28-34 (In Russian)].

12. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнения в частных прозводных*. М.: Наука, 2006. 287 с. [Nakhushev A. M. *Zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniya v chastnykh prozvodnykh*. M.: Nauka, 2006. 287 pp. (In Russian)]

13. Псху А. В. *Уравнения в частных производных дробного порядка*. М.: Наука, 2005. 199 с. [Pskhu A. V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka*. M.: Nauka, 2005. 199 pp. (In Russian)]

14. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya*. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987. 688 pp. (In Russian)]

15. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // *Докл. АН СССР*, 1986. Т. 291, № 3, С. 534-538. [Ilyin V. A., Moiseev E. I. Nelokal'naya krayevaya zadacha dlya operatora Shturma-Liuvillya v differentsial'noy i raznostnoy traktovkakh // *Dokl. AN SSSR*, 1986. vol. 291, no. 3, pp. 534-538 (In Russian)].

16. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма-Лиувилля // *Дифференциальные уравнения*, 1987. Т. 23, № 8, С. 1422-1431. [Ilyin V. A., Moiseev E. I. Nelokal'naya krayevaya zadacha vtorogo roda dlya operatora Shturma-Liuvillya // *Differentsial'nyye uravneniya yr 1987.* vol. 23, no. 8, pp. 1422-1431 (In Russian)].

17. Лосанова Ф. М. Внутреннекраевая задача для уравнения дробной диффузии // *Докл. Адыгской (Черкесской) международной академии наук*, 2020. Т. 20, № 3, С. 14-18. [Losanova F. M. Vnutrennekrayevaya zadacha dlya uravneniya drobnoy diffuzii // *Dokl. Adygskoy (Cherkesskoy) mezhdunarodnoy akademii nauk*, 2020. vol. 20, no. 3, pp. 14-18 (In Russian)].

18. Трикоми Ф. *Интегральные уравнения*. Москва: Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 300 с. [Tricomi F. *Integral'nyye uravneniya*. Moskva: Izd-vo inostr. lit-ry, 1960. 300 pp. (In Russian)]

MSC 26A33 Research Article

Inner boundary value problem with an integral condition for fractional diffusion equation

F. M. Losanova

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik.
E-mail: losanovaf@gmail.com

In this paper, we consider a nonlocal interior boundary value problem for the fractional diffusion equation with a fractional differentiation operator in the sense of Riemann-Liouville with integral conditions. The problem under study is equivalently reduced to a system of two Volterra integral equations of the second kind. The theorem of existence and uniqueness of the solution of the posed problem is proved.

Keywords: fractional diffusion equation, Riemann - Liouville operator, Green's function, integral condition.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-24-29

Original article submitted: 26.11.2021 Revision submitted: 15.12.2021

For citation. Losanova F. M. Inner boundary value problem with an integral condition for fractional diffusion equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **37**: 4, 24-29. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-24-29

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.