УДК 517.95

Научная статья

Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения четвертого порядка в частных производных

О. Ш. Киличов

Институт Математики имени В. И. Романовского Академии наук
Республики Узбекистан, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская 4б.

E-mail: oybek2402@mail.ru

В данной статье изучается нелокальная задача для уравнения четвертого порядка в которой доказывается существование и единственность решения этой задачи. Решение построено явно в виде ряда Фурье, обоснованы абсолютная и равномерная сходимость полученного ряда и возможность почленного дифференцирования решения по всем переменным. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной краевой задачи.

Ключевые слова: краевая задача, метод Фурье, существование и единственность решения.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-16-23

Поступила в редакцию: 20.11.2021

В окончательном варианте: 13.12.2021

Для цитирования. Киличов О. Ш. Об одной нелокальной краевой задаче для уравнения четвертого порядка в частных производных // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 37. № 4. С. 16-23. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-16-23

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Киличов О. Ш., 2021

Введение

Впервые задачу с высокой производной на части границы области изучал А.Н. Тихонов. Он в работе [1] для однородного уравнения теплопроводности исследовал задачу с условиями

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(0, t) = f(t), u(x, 0) = 0$$

в области $(0 < x < \infty, t > 0)$.

В работе [2] А.В. Бицадзе в n -мерной ограниченной области D исследовал задачу

$$\Delta u(x) = 0, \frac{d^m u}{dv^m} = f(x), x \in D$$

и доказал ее фредгольмовость.

Для уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца в единичном шаре краевые задачи с граничными условиями, содержащими производные высокого порядка

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

изучены в работах И.И. Баврина [3], В.В. Карачика и Б.Х. Турметова [4], В.В. Карачика [5]-[7], В.Б. Соколовского [8]. В настоящей статье мы изучаем обобщение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в прямоугольной области, для которой задана производная высокого порядка по внутренней нормали на нижнем основании прямоугольника. Для решения рассматриваемой задачи применяется метод разделения переменных. Проверка применимости метода разделения переменных для общих линейных гиперболических и параболических уравнений в нормальных областях рассмотрена в работе В.А. Ильина [9].

Для уравнения теплопроводности смешанная задача с высокой производной в начальном условии изучена в [10], а для уравнения колебания струны смешанная задача с высокими производными в начальных условиях изучена в [11]. Смешанные задачи для уравнений четвертого порядка изучены в [12]-[14].

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$u_t + u_{xxxx} = f(x, t) \quad (1.1)$$

в области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < p, 0 < t < T\}$, где $f(x, t)$ – в $(\bar{\Omega})$ непрерывна и заданные функция.

Задача. Найти решение $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,k}(\bar{\Omega})$, удовлетворяющее уравнению (1.1) в Ω и условиям

$$u(0, t) = u(p, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.2)$$

$$u_{xx}(0, t) = u_{xx}(p, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \Big|_{t=T}, \quad 0 \leq x \leq p \quad (1.4)$$

где $1 \leq k$ фиксированное натуральное число.

2. Единственность решения задачи

Теорема 2.1. *Решение задачи (1.1)-(1.4) единственно, если оно существует.*

Доказательство. Пусть $f(x, t) = 0$ в $\bar{\Omega}$. Покажем, что $u(x; t) = 0$ в $\bar{\Omega}$. Следуя [15], рассмотрим интеграл

$$\alpha_n(t) = \int_0^p u(x, t) X_n(x) dx, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

где функции

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{p}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

образуют полную ортонормированную систему в $L_2(0; p)$ [16]. Дифференцируя (2.1) по t из однородного уравнения $u_t + u_{xxxx} = 0$ мы находим

$$\alpha'_n(t) = \int_0^p u_t(x, t) X_n(x) dx$$

или

$$\alpha_n'(t) = \int_0^p u_{xxxx}(x, t) X_n(x) dx \quad (2.3)$$

Интегрируя его по частям, имеем

$$\alpha_n'(t) + \lambda_n^4 \alpha_n(t) = 0 \quad (2.4)$$

Общее решение уравнение (2.4) выписывается в виде

$$\alpha_n(t) = C_n \cdot \exp\{-\lambda_n^4 t\}. \quad (2.5)$$

Продифференцируем (2.5) k раз по t ,

$$\alpha_n^{(k)}(t) = C_n \cdot (-\lambda_n^4)^k \cdot \exp\{-\lambda_n^4 t\}.$$

Чтобы найти неизвестный коэффициент C_n , в силу условий (1.4), получаем $C_n = 0$. Тогда из (2.5) следует, что $\alpha_n(t) = 0$. Поскольку $X_n(x)$ полная ортонормированная система в $L_2(0; p)$, то из полноты функции $X_n(x)$ следует, что $u(x; t) = 0$ почти всюду в $\bar{\Omega}$. Учитывая, что $u(x, t) \in C_{x,t}^{4,k}(\bar{\Omega})$ получим $u(x; t) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$.

Теорема 2.1 доказана. $\square$

3. Существование решения задачи

Исследуем регулярную разрешимость задачи. Мы ищем регулярное решение этой задачи в виде ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x) \quad (3.1)$$

разложенной по полной ортонормированной системе $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \lambda_n x$ в $L_2(0, p)$, где $\lambda_n = \frac{n\pi}{p}$. Ясно, что $u(x, t)$ удовлетворяет условию (1.2) и (1.3). Разлагаем данную функцию $f(x, t)$ в ряд Фурье по функциям $X_n(x)$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) \quad (3.2)$$

где

$$f_n(t) = \int_0^p f(x, t) X_n(x) dx \quad (3.3)$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в (1.1), с учетом (1.4) находим формальное решение задачи в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) & \left[\frac{e^{\lambda_n^4(T-t)}}{e^{\lambda_n^4 T} - 1} \sum_{s=0}^{k-1} (-\lambda_n^4)^{s-k} \left(f_n^{(k-1-s)}(T) - f_n^{(k-1-s)}(0) \right) + \right. \\ & \left. + \int_0^T f_n(\tau) K_n(t, \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$K_n(t, \tau) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda_n^4(T-t+\tau)}}{e^{\lambda_n^4 T} - 1}, & 0 \leq \tau \leq t, \\ \frac{e^{-\lambda_n^4(t-\tau)}}{e^{\lambda_n^4 T} - 1}, & t \leq \tau \leq T. \end{cases}$$

Исследуем абсолютную и равномерную сходимость ряда (3.4) и следующих рядов

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) & \left[\frac{e^{\lambda_n^4(T-t)}}{e^{\lambda_n^4 T} - 1} \sum_{s=0}^{k-1} (-\lambda_n^4)^{s-k+1} \left(f_n^{(k-1-s)}(T) - f_n^{(k-1-s)}(0) \right) + \right. \\ & \left. + f_n(t) - \lambda_n^4 \int_0^T f_n(\tau) K_n(t, \tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) & \left[-\frac{e^{\lambda_n^4(T-t)}}{e^{\lambda_n^4 T} - 1} \sum_{s=0}^{k-1} (-\lambda_n^4)^{s-k+1} \left(f_n^{(k-1-s)}(T) - f_n^{(k-1-s)}(0) \right) + \right. \\ & \left. + \lambda_n^4 \int_0^T f_n(\tau) K_n(t, \tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) & \left[\frac{e^{\lambda_n^4(T-t)}}{e^{\lambda_n^4 T} - 1} \sum_{s=0}^{k-1} (-\lambda_n^4)^s \left(f_n^{(k-1-s)}(T) - f_n^{(k-1-s)}(0) \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{s=0}^{k-1} (-\lambda_n^4)^s f_n^{(k-1-s)}(t) + (-\lambda_n^4)^k \int_0^T f_n(\tau) K_n(t, \tau) d\tau \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

По признаку сравнения, если ряд (3.7) сходится, то ряды (3.4)-(3.6) члены которых меньше чем соответствующие члены ряда (3.7) сходятся абсолютно и равномерно. Покажем абсолютно и равномерную сходимость ряда (3.7). Для этого докажем следующие леммы.

Лемма 3.1. Пусть $f(x, t) \in W_2^{(4k-3, k-1)}(\Omega)$, $\frac{\partial^{2l} f(0, t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} f(p, t)}{\partial x^{2l}} = 0$, $l = 0, 1, \dots, (2k-2)$ тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \sum_{s=0}^{k-1} (-\lambda_n^4)^s f_n^{(k-1-s)}(t) \quad (3.8)$$

сходится абсолютно и равномерно в $\bar{\Omega}$.

Доказательство. Разложим ряд (3.8) следующем виде

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left| X_n(x) \sum_{s=0}^{k-1} (-\lambda_n^4)^s f_n^{(k-1-s)}(t) \right| & \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{k-1} \lambda_n^{4s} \left| f_n^{(k-1-s)}(t) \right| = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| f_n^{(k-1)}(t) \right| + \lambda_n^4 \left| f_n^{(k-2)}(t) \right| + \dots + \lambda_n^{4k-4} \left| f_n(t) \right| \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{4k-4} \left| f_n(t) \right| \quad (3.10)$$

сходится, то ряд (3.9) также сходится. Интегрируя по частям (3.3) получаем

$$\left| f_n(t) \right| = \frac{1}{\lambda_n^{4k-3}} \left| f_n^{(4k-3,0)}(t) \right| \quad (3.11)$$

где

$$f_n^{(4k-3,0)}(t) = \int_0^p \frac{\partial^{4k-3} f(x, t)}{\partial x^{4k-3}} \sqrt{\frac{2}{p}} \sin\left((4k-3)\frac{\pi}{2} + \lambda_n x\right) dx.$$

Если применить (3.11) к (3.10), в силу неравенств Буняковского и Бесселя [17], ряд

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{4k-4} |f_n(t)| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |f_n^{(4k-3,0)}(t)| \leq \\ &\leq \frac{p}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n^{(4k-3,0)}(t)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{p}{\sqrt{6}} \left\| \frac{\partial^{4k-3} f}{\partial x^{4k-3}} \right\|_{L_2(\Omega)} \end{aligned}$$

сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Лемма 3.1 доказана.

□

Лемма 3.2. Пусть $f(x, t) \in W_2^{(4k+1,0)}(\Omega)$, $\frac{\partial^{2l} f(0,t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} f(p,t)}{\partial x^{2l}} = 0$, $l = 0, 1, \dots, (2k)$ тогда ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) (-\lambda_n^4)^k \int_0^T f_n(\tau) K_n(t, \tau) d\tau \quad (3.12)$$

сходится абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$.

Доказательство. При оценке рядов (3.12), мы рассмотрим следующий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |X_n(x) (-\lambda_n^4)^k \int_0^T f_n(\tau) K_n(t, \tau) d\tau| \leq \sqrt{\frac{2}{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{4k} \int_0^T |f_n(\tau)| d\tau \quad (3.13)$$

Интегрируя по частям (3.3) $(4k+1)$ раза, получаем

$$|f_n(t)| = \frac{1}{\lambda_n^{4k+1}} |f_n^{(4k+1,0)}(t)| \quad (3.14)$$

где

$$f_n^{(4k+1,0)}(t) = \int_0^p \frac{\partial^{4k+1} f(x, t)}{\partial x^{4k+1}} \sqrt{\frac{2}{p}} \sin\left((4k+1) \frac{\pi}{2} + \lambda_n x\right) dx.$$

Если (3.14) применим к правой части (3.13), затем применяя неравенство Коши-Буняковского для интегралов и сумм, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T |f_n^{(4k+1,0)}(\tau)| d\tau &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^T \frac{1}{\lambda_n^2} d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^T |f_n^{(4k+1,0)}(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{p}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{T}}{n} \cdot \|f_n^{(4k+1,0)}(\tau)\|_{L_2(0,T)} \leq \frac{p\sqrt{T}}{\sqrt{6}} \cdot \left\| \frac{\partial^{4k+1} f}{\partial x^{4k+1}} \right\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует равномерная и абсолютная сходимость рядов (3.12) в $\overline{\Omega}$.

Лемма 3.2 доказана.

□

Теорема 3.1. Пусть

$$f(x, t) \in W_2^{(4k+1,k-1)}(\Omega), \quad \frac{\partial^{2l} f(0,t)}{\partial x^{2l}} = \frac{\partial^{2l} f(p,t)}{\partial x^{2l}} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, (2k)$$

тогда ряды (3.4)-(3.7) сходятся абсолютно и равномерно в $\overline{\Omega}$. Решение (3.4) удовлетворяет уравнению (1.1) и условиям (1.2)-(1.4).

Доказательство. В силу доказанных лемм легко показать, что ряды (3.4)-(3.7) сходятся абсолютно и равномерно. Складывая (3.5) и (3.6) убеждаемся, что решение (3.4) удовлетворяет уравнению (1.1) в Ω . Условия (1.2) и (1.3) выполняются в силу свойств функции $X_n(x)$. Переходя к пределу в (3.7) при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow T$ можно показать что условия (1.4) выполняются.

Теорема 3.1 доказана.

□

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

1. Тихонов А. Н. О краевых условиях, содержащих производные порядка превышающие порядок уравнения // *Мат. сборник*, 1950, С. 35-56. [Tikhonov A. N. O krayevix usloviyax, soderjashix proizvodniye poriyadka previshayushiyey poriyadok uravneniya // *Mat. sbornik*, 1950, pp. 35-56 (In Russian)].
2. Бицадзе А. В. К задаче Неймана для гармонических функции // *Докл. АН СССР*, 1990. Т. 311, № 1, С. 11-13. [Bitsadze A. V. K zadache Neymana dlya garmonicheskix funktsii // *Dokl. AN SSSR*, 1990. vol. 311, no. 1, pp. 11-13 (In Russian)].
3. Баврин И. И. Операторы для гармонических функции и их приложения // *Дифференциальные уравнения*, 1985. Т. 21, № 1, С. 9-15. [Bavrin I. I. Operatori dlya garmonicheskix funktsii i ix prilozheniya // *Differentsialniye uravneniya*, 1985. vol. 21, no. 1, pp. 9-15 (In Russian)].
4. Карачик В. В., Турметов Б. Х. Об одной задаче для гармонического уравнения. // *Известия АН УзССР, сер. Физ.-мат. наук.*, 1990. Т. 4, С. 17-21. [Karachik V. V., Turmetov B. X. Ob odnoy zadache dlya garmonicheskogo uravneniya. // *Izvestiya AN Uz SSR, ser. fiz.-mat. nauk.*, 1990. vol. 4, pp. 17-21 (In Russian)].
5. Карачик В. В. О разрешимости краевой задачи для уравнения Гельмгольца с нормальными производными высокого порядка на границе // *Дифференциальные уравнения*, 1992. Т. 28, № 5, С. 907-909. [Karachik V. V. O razreshimosti krayevoy zadachi dlya uravneniya Gelmgoltsa s normalnimi proizvodnimi visokogo poriyadka na granise // *Differentsialniye uravneniya*, 1992. vol. 28, no. 5, pp. 907-909 (In Russian)].
6. Карачик В. В. Об одной задаче для уравнения Пуассона с нормальными производными высокого порядка на границе // *Дифференциальные уравнения*, 1996. Т. 32, no. 3, pp. 1501-1503. [Karachik V. V. Ob odnoy zadache dlya uravneniya Puassona s normalnimi proizvodnimi visokogo poriyadka na granise // *Differentsialniye uravneniya*, 1996. vol. 32, no. 3, pp. 1501-1503 (In Russian)].
7. Карачик В. В. Обобщенная задача Неймана для гармонических функции в полупространстве // *Дифференциальные уравнения*, 1999. Т. 35, no. 7, pp. 1-6. [Karachik V. V. Obobsheniya zadacha Neymana dlya garmonicheskix funktsii v poluprostranstve // *Differentsialniye uravneniya*, 1999. vol. 35, no. 7, pp. 1-6 (In Russian)].
8. Соколовский В. Б. Об одном обобщении задачи Неймана // *Дифференциальные уравнения*, 1998. Т. 34, no. 4, pp. 714-716. [Sokolovskiy V. B. Ob odnom obobshenii zadacha Neymana // *Differentsialniye uravneniya*, 1998. vol. 34, no. 4, pp. 714-716 (In Russian)].
9. Il'in V. A. About solvability of initial-boundary problems for hyperbolic and parabolic equations // *Mat. Nauk*, 1960. Т. 15, no. 2, pp. 97-154 (In Russian).
10. Amanov D. On a generalization of the first initial-boundary value problem for the heat conduction equation // *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, 2014. vol. 2, no. 1, pp. 88-97.
11. Amanov D., Ibragimov G., Kilicman A. On a Generalization of the Initial-Boundary Problem for the Vibrating String Equation // *Symmetry*, 2019. vol. 70, no. 11(73), pp. 2-10 <https://doi.org/10.3390/sym11010073>.
12. Аманов Д. Об одной нелокальной задаче для уравнения теплопроводности // *УзМЖ*, 2016. Т. 2, С. 21-25. [Amanov D. Ob odnoy nelokalnoy zadache dlya uravneniya teploprovodnosti // *UzMI*, 2016. vol. 2, pp. 21-25 (In Russian)].
13. Amanov D. On a generalization of the Dirichlet problem for the Poisson equation // *Boundary Value Problems*, 2016. no. 2016:160, pp. 170-182 DOI 10.1186/s13661-016-0668-6..

14. Киличов О. Ш. Краевая задача для уравнения четвертого порядка // *Бюллетень Института математики*, 2021. Т. 4, № 2, С. 61-69. [Qilichov O. Sh. Krayevaya zadacha dlya uravneniya chetvertogo poryadka // *Byulleten Institut matematiki*, 2021. vol. 4, no. 2, pp. 61-69 (In Russian)].
15. Моисеев Е. И. О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // *Дифференциальные уравнения*, 1999. Т. 35, no. 8, pp. 1094-1100. [Moiseyev Y. I. O reshenii spektralnim metodom odnoy nelokalnoy krayevoy zadachi // *Differentsialniye uravneniya*, 1999. vol. 35, no. 8, pp. 1094-1100 (In Russian)].
16. Ильин В. А., Позняк Э. Г. *Основы математического анализа*. М.: Наука, 1973. [Ilin V. A., Poznyak E. G. *Osnovi matematicheskogo analiza*. M.: Nauka, 1973 (In Russian)].
17. Люстерник Л. А., Соболев В. И. *Элементы функционального анализа*. М.: Наука, 1965. [Lyusternik L. A., Sobolev V. I. *Elementi funktsionalnogo analiza*. M.: Nauka, 1965 (In Russian)].

MSC 35J15

Research Article

On a nonlocal boundary value problem for the equation fourth-order in partial derivatives

O. Sh. Kilichov

Institut of Mathematics named after V.I. Romanovskiy Academy of Sciences of the Republic Uzbekistan, st. University, 4b, Tashkent city, 100174, Uzbekistan.

E-mail: oybek2402@mail.ru

In this article, we study a nonlocal problem for a fourth-order equation in which the existence and uniqueness of a solution to this problem is proved. The solution is constructed explicitly in the form of a Fourier series; the absolute and uniform convergence of the obtained series and the possibility of term-by-term differentiation of the solution with respect to all variables are substantiated. A criterion for the unique solvability of the stated boundary value problem is established.

Key words: boundary value problem, Fourier method, existence and uniqueness of the solution.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-16-23

Original article submitted: 20.11.2021

Revision submitted: 13.12.2021

For citation. Kilichov O. Sh. On a nonlocal boundary value problem for the equation fourth-order in partial derivatives. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **37**: 4, 16-23. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-16-23

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Kilichov O. Sh., 2021

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors