МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.5 Научная статья

Задача Коши для существенно нагруженного гиперболического уравнения

А. Х. Аттаев

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

В работе проводится исследование задачи Коши для существенно нагруженного уравнения колебания одномерной струны. Приводятся примеры характеристических многообразий, для которых задача Коши поставлена корректно, а также нехарактеристических многообразий, для которых задача Коши поставлено некорректно.

Ключевые слова: задача Коши, существенно нагруженное уравнение, характеристическое многообразие, регулярное решение, разностное уравнение, область определения распространение волны, начальные данные.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-10-15

Поступила в редакцию: 17.11.2021 В окончательном варианте: 11.12.2021

Для цитирования. Аттаев А. Х. Задача Коши для существенно нагруженного гиперболического уравнения // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 37. № 4. С. 10-15. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-10-15

Введение

Решение многих важных задач по оптимальному управлению агроэкосистемой, например, задачи долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги сводится к изучению нагруженных дифференциальных уравнений. Такие уравнения возникают при исследовании нелинейных уравнений, уравнений переноса частиц, задач оптимального управления, обратных задач, при эквивалентном преобразовании нелокальных задач, при численном решении интегро-дифференциальных уравнений. Нагруженные уравнения используются и как метод введения обобщенных решений уравнений математической физики.

Первые исследования по нагруженным уравнениям были проведены для нагруженных интегральных уравнений [1], [2]. Одним из первых, кто применил в своих работах нагруженные дифференциальные и интегродифференциальные

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

уравнения были С.М. Тарг [3] и Н.Н. Кочина [4]. Начиная с середины прошлого столетия в зарубежной литературе появились много интересных работ по нагруженным дифференциальным уравнениям и системам. Общепринятым названием таких уравнений было дифференциально-граничные уравнения. Здесь следует отметить работу R.S. Phillips [5], где автор проиллюстрировал примеры таких операторов, когда рассматривал максимальные диссипативные операторы. А также монографию A.M. Krall [6], где автор описал класс самосопряженных нагруженных дифференциальных операторов. Тем не менее, принятое сейчас в научной литературе определение нагруженных дифференциальных уравнений было дано сравнительно недавно А.М. Нахушевым [7]. Именно работы М. Нахушева и его учеников дали начало интенсивному и систематическому изучению локальных краевых, нелокальных и внутреннекраевых задач для нагруженных уравнений в частных производных. Наиболее полный анализ полученных результатов и библиография по нагруженным уравнениям приведены в монографии [8]. Что касается задачи Коши для нагруженных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, то, по видимому, работы [9], [10] являются первыми, где авторы сделали плодотворную попытку выделить класс таких уравнений определенной структуры, для которых задача Коши корректно разрешима, аналогично классу корректных по Н.Т. Петровскому уравнений с частными производными.

Принципиально новый подход к изучению нагруженных дифференциальных уравнений предложен казахскими математиками М.Д. Дженалиевым и М.И. Рамазановым, основы которого изложены в их совместной мографии [11]. Они ввели понятие спектрально-нагруженных уравнений, т.е. таких уравнений в которых, во первых, спектральный параметр служит коэффициентом нагруженной части, во вторых, порядок производной в нагруженном слагаемом равен или выше порядка дифференциальной части уравнения. В этом случае оказывается, что нагруженное слагаемое является сильным возмущением его дифференциальной части.

В данной работе исследуется задача Коши для существенно-нагруженного уравнения колебания одномерной струны

$$u_{xx} - u_{tt} = \lambda u_{tt}(x_0, t), \tag{1}$$

где λ, x_0 – произвольные действительные константы; $u = u(x,y)$.

Задача Коши с данными на нехарактеристическом многообразии

Будем рассматривать неограниченную струну, колебания которой описывается уравнением (1), следовательно область где ищется решение представляет собой $\Omega = \{(x,y) : -\infty < x < \infty, -\infty < t < \infty\}$.

Под регулярным решение уравнения (1) будем понимать функцию $u(x,t)$, которая дважды непрерывно дифференцируема как по x так и по t в Ω. Пусть $J = \{\xi : -\infty < \xi < \infty\}$.

Задача 1. Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \tau_1(x), \quad u_t(x,0) = \nu_1(x), \quad x \in J. \tag{2}$$

Теорема 1. Пусть $\lambda \neq -1$, $\tau_1(x) \in C^2(J)$, $\nu_1(x) \in C^1(J)$. Тогда регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) представимо в виде

$$u(x,t) = v(x,t) - \frac{\lambda}{1+\lambda}[v(x_0,t) - \tau_1(x_0) - t\nu_1(x_0)], \tag{3}$$

где

$$v(x,t) = \frac{\tau_1(x-t)+\tau_1(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \nu_1(\xi)d\xi.$$

Доказательство. При $\lambda \neq -1$ обратимая замена $v(x,t) = u(x,t) + \lambda u(x_0,t)$ позволяет свести искомую задачу к задаче Коши

$$v(x,0) = \tau_1(x) + \lambda\tau_1(x_0), \quad v_t(x,0) = \nu_1(x) + \lambda\nu_1(x_0) \tag{4}$$

для уравнения

$$v_{xx} - v_{tt} = 0. \tag{5}$$

Подставляя решение задачи (4) для уравнения (5) в выражение

$$u(x,t) = v(x,t) - \frac{\lambda}{1+\lambda}v(x_0,t), \tag{6}$$

получим искомый результат.

Очевидно, что корректность Задачи 1 непосредственно следует из корректности задачи (4) для уравнения (5).

Пусть теперь начальные данные $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ отличны от нуля лишь в промежутке $[0,l]$. Тогда область определения волны представляет собой шестиугольник: $\Omega_0 = \{(x,t) : 0 < x-t < l, 0 < x+t < l, -x_0 < t < x_0\}$.

Задача 2. Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям

$$u(0,t) = \tau_2(t), \quad u_x(l,t) = \nu_2(t), \quad t \in J. \tag{7}$$

Известно, что данная задача корректно поставлена для уравнения (1), когда $\lambda = 0$. Следующая теорема показывает, что, если $\lambda \neq 0$, то задача (7) для уравнения (1) является некорректной.

Теорема 2. Пусть $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$. Тогда однородная Задача 2 имеет бесконечное множество решений представимых в виде

$$u(x,t) = c\left[a^{t-x} + a^{t+x} - \frac{\lambda}{1+\lambda}\left(a^{t-x_0} + a^{t+x_0}\right)\right], \tag{8}$$

где a^{x_0} – есть решения уравнения

$$\frac{\lambda}{1+\lambda}a^{2x_0} + 2a^{x_0} + \frac{\lambda}{1+\lambda} = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Перепишем (6) в виде

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t) - \frac{\lambda}{1+\lambda}[f(x_0-t) + g(x_0+t)]. \tag{10}$$

Формула (10) есть общее решение уравнения (1). Удовлетворяя (10) условиям (7), когда $\tau_0(x) \equiv \nu_2(x) \equiv 0$, для нахождения $f(t)$ и $g(t)$ получим следующую систему

$$f'(-t) + g'(t) = 0,$$

$$2g'(t) - \frac{\lambda}{1+\lambda}[g'(t-x_0) + g'(t+x_0)] = 0.$$

Последнее уравнение является разностным однородным уравнением и его решение представимо в виде $g'(t) = c_1 a^t$, где a^{x_0} есть решение уравнения (9). Найдя отсюда $f(t)$ и $g(t)$и подставляя в (10), получим искомый результат, в котором $c = \frac{c_1}{\ln a}$. Это говорит о том, что если решение Задачи 2 существует, то он неединственно. Например, решение неоднородной Задачи 2, когда $\tau'(t) = \nu(t) + \frac{\lambda}{1+\lambda}\nu(t-x_0)$ совпадает с (8), т.е. оно неединственно.

Задача Коши с данными на характеристическом многообразии

Задача 3. Найти регулярное решение $u(x,t)$ уравнения (1) в области Ω, удовлетворяющее условиям

$$u(x,x) = \tau_3(x), \quad u_t(x,x) = \nu_3(x), \quad x \in J. \tag{11}$$

Известно, что однородная Задача 3 для уравнения (1) при $\lambda = 0$ имеет бесчисленное множество решений вида

$$u(x,t) = F(x-t),$$

где $F(\xi)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, причем $F(0) = F'(0) = 0$, т.е. Задача 3 для уравнения (1) является некорректной. На вопрос как обстоит дело в случае $\lambda \neq 0$ дает ответ следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$, $\tau_3(x) \in C^2(\Omega)$, $\nu_3(x) \in C^1(\Omega)$, $\frac{1}{\lambda}\tau(x_0) = \tau(x_0) - 2\int\limits_0^{x_0} \nu(\xi)d\xi$. Тогда любое регулярное решение Задачи 3 представимо в виде

$$u(x,t) = \frac{1+\lambda}{\lambda}\left[\tau_3(x_0-x+t) - 2\int\limits_0^{x_0-x+t} \nu_3(\xi)d\xi\right] -$$

$$-2\tau_3\left(\frac{2x_0-x+t}{2}\right) + 2\int\limits_0^{\frac{2x_0-x+t}{2}} \nu_3(\xi)d\xi + \int\limits_{\frac{x+t}{2}}^{t} \nu_3(\xi)d\xi + 2\tau_3\left(\frac{x+t}{2}\right) - \tau_3(t). \tag{12}$$

Доказательство. Удовлетворяя (10) условиям (11), находим выражение $f(\xi)$ и $g(\xi)$. Подставляя эти значения в (10), после элементарных преобразований получаем формулу (12). Пусть теперь начальные данные $\tau_3(x)$ и $\nu_3(x)$ отличны от нуля лишь в промежутке $[0,l]$. Тогда область определения волны представляет собой $\Omega_{x_0} = \{(x,t) : x_0 - l < x-t < x_0, 0 < x+t < 2l, 0 < t < l\}$, т.е. это есть как в случае Задачи 1 шестиугольник, ограниченный четырьмя характеристиками уравнения (1) $x-t = x_0$, $x-t = l-x_0$, $x+t = 0$, $x+t = 2l$ и прямыми $t = 0$ и $t = l$. Нетрудно заметить, что геометрия области определения решения $u(x,t)$ по данным (11) существенно зависит от расположения точки x_0 на отрезке $[0,l]$.

Если $x_0 = 0$ или $x_0 = l$, то область определения Ω_0 и Ω_l представляют собой четырехугольники соответственно $\Omega_0 = \{(x,t) : -l < x-t < 0, 0 < x+t < 2l, 0 < t < l\}$ и $\Omega_l = \{(x,t) : 0 < x-t < l, 0 < x+t < 2l, 0 < t < l\}$.

Случай $\lambda = -1$.

Из выражения $v(x,t) = u(x,t) + \lambda u(x_0,t)$ при $\lambda = -1$ следует, что $v(x_0,t) = 0$, а в качестве $u(x_0,t)$ можно взять любую произвольную функцию $g(t)$. Следовательно легко получить, что

$$u(x,t) = f(x-t) - f(2x_0 - x - t) + g(t). \tag{13}$$

Используя (13) элементарно показывается, что:

1. Однородная Задача 1 для уравнения (1) при $\lambda = -1$ имеет бесчисленное множество решений вида (13), где $f(x)$ – произвольная периодическая с периодом $2x_0$ и четная функция, а $g(x)$ произвольная функция для которой $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$.

2. Однородная Задача 2 для уравнения (1) при $\lambda = -1$ имеет бесчисленное множество решений вида $u(x,t) = f(t) - f(0)$, где $f(x)$ – произвольная функция.

3. Задача 3 при $\lambda = -1$ корректно поставлена и ее решение получается из (12) при $\lambda = -1$.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

1. Knezer A. Rendiconti del Circolo Matematico // *di Palezno*, 1914. vol. 37, pp. 169–197.
2. Гюнтер Н. М. К теории интегралов Стилтьесса-Родина и интегральных уравнений // *Докл. АН СССР*, 1938. Т. 21, С. 219–223. [Gyunter N. M. K teorii integralov Stilt'yessa-Rodina i integral'nykh uravneniy // *Dokl. AN SSSR*, 1938. vol. 21, pp. 219–223 (In Russian)].
3. Тарг С. М. *Основные задачи теории ламинарных течений*. М.-Л.: Гостехиздат, 1951. 420 с. [Targ S. M. *Osnovnyye zadachi teorii laminarnykh techeniy*. M.-L.: Gostekhizdat, 1951. 420 pp. (In Russian)]
4. Кочина Н. Н. Об изменениях уровня грунтовых вод при посевах // *ПМТФ*, 1971. № 4, С. 87–94. [Kochina N. N. Ob izmeneniyakh urovnya gruntovykh vod pri posevakh // *PMTF*, 1971. no. 4, pp. 87–94 (In Russian)].
5. Phillips R. S. Dissipative operators and hyporbolic systems of partial differential equations // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1959. no. 90, pp. 193–254.
6. Krall A. M. Differential - boundary operators // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1971. vol. 154.
7. Нахушев А. М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро - дифференциального уравнения второго порядка // *Дифференц. уравнения*, 1976. Т. 12, № 1, С. 103–108. [Nakhushev A. M. O zadache Darbu dlya odnogo vyrozhdayushchegosya nagruzhennogo integro - differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka // *Differents. uravneniya*, 1976. vol. 12, no. 1, pp. 103–108 (In Russian)].
8. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применение*. М.: Наука, 2012. 232 с. [Nakhushev A. M. *Nagruzhennyye uravneniya i ikh primeneniye*. M.: Nauka, 2012. 232 pp. (In Russian)]
9. Борок В. М., Житомирский Я. И. Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. I. Единственность. // *Изв. вузов. Матем.*, 1981. № 9, С. 5–12. [Borok V. M., Zhitomirskiy YA. I. Zadacha Koshi dlya lineynykh nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy. I. Yedinstvennost'. // *Izv. vuzov. Matem.*, 1981. no. 9, pp. 5–12 (In Russian)].
10. Борок В. М., Житомирский Я. И. Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. II. Корректность // *Изв. вузов. Матем.*, 1981. № 10, С. 5–11. [Borok V. M., Zhitomirskiy YA. I. Zadacha Koshi dlya lineynykh nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy. II. Korrektnost' // *Izv. vuzov. Matem.*, 1981. no. 10, pp. 5–11 (In Russian)].
11. Дженалиев М. Т., Ромазанов М. И. *Нагруженные уравнения как возмущение дифференциальных уравнений*. Аматы, 2010. 336 с. [Dzhenaliyev M. T., Romazanov M. I. *Nagruzhennyye uravneniya kak vozmushcheniye differentsial'nykh uravneniy*. Amaty, 2010. 336 pp. (In Russian)]

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2021. vol. 37. no. 4. P. 10–15. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

MSC 35L10 Research Article

Cauchy problem for a substantially loaded hyperbolic equation

A. Kh. Attaev

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS,
89A Shortanova St., Nalchik, 360000, Russia
E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

In this work, we study the Cauchy problem for a substantially loaded vibration equation of a one-dimensional string. Examples are given of characteristic manifolds for which the Cauchy problem is posed correctly, as well as non-characteristic manifolds for which the Cauchy problem is posed incorrectly.

Keywords: Cauchy problem, essentially loaded equation, characteristic manifold, regular solution, difference equation, domain of wave propagation, initial data.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-10-15

Original article submitted: 17.11.2021 Revision submitted: 11.12.2021

For citation. Attaev A. Kh. Cauchy problem for a substantially loaded hyperbolic equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **37**: 4, 10-15. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-10-15

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.