УДК 519.62, 51-7, 004.942 Научная статья

Численно-аналитическое исследование математических моделей капиллярных менисков

А. А. Сокуров

Институт прикладной математики и автоматизации — филиал
Федерального государственного бюджетного научного учреждения
«Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр
Российской академии наук», 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А
E-mail: asokuroff@gmail.com

В работе рассмотрены математические модели осесимметричных капиллярных менисков — лежащая и висящая капли, развернутый мениск, учитывающие размерную зависимость поверхностного натяжения. Доказаны теоремы существования и единственности решений задач, описывающих равновесные поверхности менисков. Разработаны и протестированы эффективные численные методы, предназначенные для приближенного расчета профилей менисков. На языке «Wolfram Language» написана компьютерная программа, с помощью которой проведены масштабные вычислительные эксперименты по выявлению степени и характера влияния параметров моделей на равновесную форму каждого из рассматриваемых менисков.

Ключевые слова: математическое моделирование, лежащая капля, висящая капля, капиллярный мениск, поверхностное натяжение, размерная зависимость, средняя кривизна, численная схема, сходимость.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-80-93

Поступила в редакцию: 15.09.2021 В окончательном варианте: 15.10.2021

Для цитирования. Сокуров А. А. Численно-аналитическое исследование математических моделей капиллярных менисков // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 36. № 3. C. 80-93. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-80-93

Введение

Изучение капиллярных явлений имеет большое значение как с теоретической, так и с прикладной точки зрения [1, 2]. Результаты исследований в этом направлении находят широкое применение во множестве областей: микроэлектронике, нефтяной и газовой промышленности, медицине, биотехнологиях, космических технологиях и материаловедении.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Наиболее важной является задача об определении равновесных форм капиллярных поверхностей в различных условиях. Впервые эта задача рассматривалась в известной работе F. Bashforth и J. C. Adams (1883 г.) [3]. В ней для широкого диапазона изменения числа Бонда были протабулированы безразмерные координаты профиля капли, свободно лежащей на плоской поверхности. Численное моделирование более широкого класса менисков рассматривалось в трудах J. F. Padday (1971–1997 гг.), E. A. Boucher (1979–1987 гг.), S. Hartland (1976 г.) и C. Pozrikidis (2009–2012 гг.). Следующими исследователями были найдены аналитические приближения различной степени точности: M. E. R. Shanahan (1982–1985 гг.), S. W. Rienstra (1990 г.), S. B. G. M. O'Brien (1991–2010 гг.), V. A. Lubarda (2011 г.) и др. Развитию математической теории капиллярных поверхностей способствовала большая серия работ R. Finn (1970–2018 гг.), результаты которых имеют в основном качественный характер. В них доказаны теоремы существования и единственности решений соответствующих задач, получены априорные оценки и асимптотические соотношения. При математическом моделировании систем с малыми размерами, как правило, требуется учитывать специфические изменения каких-либо параметров. В теории капиллярности таким параметром является поверхностное натяжение. Размерную зависимость поверхностного натяжения в своих работах изучали J. W. Gibbs (1871–1878 гг.), R. C. Tolman (1949 г.), А. И. Русанов (1975–2021 гг.), M. Isaiev (2016–2020 гг.), J. Kalova (2015 г.), Ø. Wilhelmsen (2015–2020 гг.) и др. Современные теории в той или иной степени опираются на их результаты.

Несмотря на достигнутые в области моделирования капиллярных явлений успехи, остается нерешенным ряд проблем. Во-первых, учет размерных зависимостей физических параметров приводит к математическим моделям капиллярных поверхностей с очень сложной нелинейной структурой. Получить аналитические решения начальных и краевых задач здесь не представляется возможным. В данном случае иных методов моделирования кроме ресурсоемких методов молекулярной динамики и Монте-Карло не существуют, а аналитические методы исследования неразвиты вообще. Во-вторых, отсутствует проблемно-ориентированное программное обеспечение. Имеющиеся на сегодняшний день программные комплексы, такие как «Simulink», «MapleSim», «ANSYS» и т. п., не обладают должным функционалом. Решение указанных проблем представляется актуальным.

Размерная зависимость поверхностного натяжения

В работе исследовались наиболее общие математические модели менисков, учитывающие размерную зависимость поверхностного натяжения. Размерная зависимость поверхностного натяжения выражается нелинейным уравнением [4, 5, 6]

$$\sigma(R_1, R_2) = \frac{\sigma^{(\infty)}}{1 + \delta\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}, \tag{1}$$

где δ — длина Толмена, σ — поверхностное натяжение, $R_{1,2}$ — главные радиусы кривизны поверхности, $\sigma^{(\infty)}$ — поверхностное натяжение на плоскости. Она обусловлена разницей между энергией отрыва молекулы от плоской поверхности и энергией отрыва молекулы от искривленной. Например, в случае вогнутой поверхности из-за большего числа соседей работа по отрыву молекулы будет больше, нежели в случае плоскости (рис. 1).

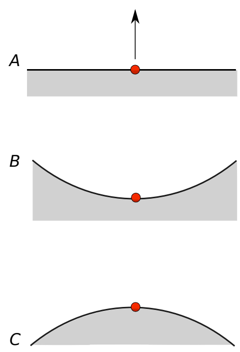

Рис. 1. Зависимость поверхностного натяжения от кривизны поверхности

В случае же выпуклой поверхности аналогичная работа будет меньше. Отметим, что для более простых математических моделей, ранее изученных в литературе, параметр δ в уравнении (1), отвечающий за размерный эффект, полагается равным нулю.

Математическая модель лежащей капли

На рисунке представлены поперечное сечение свободно лежащей капли, связанная с ним система координат и принятые обозначения. Предполагается, что капля является телом вращения.

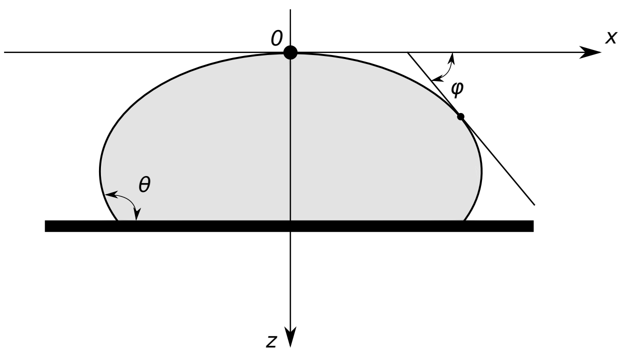

Рис. 2. Профиль лежащей капли

Здесь (x, z) — координаты точки профиля, φ — угол наклона касательной с осью x, θ — контактный угол смачивания, β — капиллярная постоянная. С учетом размерной зависимости поверхностного натяжения профиль лежащей капли описывается [3] решением задачи (2)–(3), в которой входными параметрами являются числа λ, β и δ:

$$\frac{d^2z/dx^2}{\left[1+(dz/dx)^2\right]^{3/2}}+\frac{dz/dx}{x\left[1+(dz/dx)^2\right]^{1/2}}=\frac{\lambda+\beta z}{1-\delta\left(\lambda+\beta z\right)}, \tag{2}$$

$$z\big|_{x=0}=0, \quad \frac{dz}{dx}\bigg|_{x=0}=0. \tag{3}$$

Из физических соображений все параметры модели неотрицательны. Уравнение (2) имеет особенность в начальной точке, поэтому нельзя установить факт существования и единственности решения задачи (2)–(3), ссылаясь на классические теоремы теории дифференциальных уравнений (вроде теорем Пикара или Коши). Доказана теорема:

Теорема 1. *Пусть*

$$\lambda > 0, \quad \beta > 0, \quad \delta \geq 0, \quad 1 - \delta\lambda > 0.$$

Тогда на полуинтервале $(0, r]$*, где*

$$0 < r < 2\left(\frac{1}{\lambda} - \delta\right),$$

существует, и притом единственное, решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям (3). Функция $z = z(x)$ *непрерывна на отрезке* $[0, r]$*, непрерывно-дифференцируема на полуинтервале* $[0, r)$*,*

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=r} = \infty,$$

а отрезок $[0, r]$ *— максимальный промежуток существования решения.*

Теорема 1 позволяет сделать некоторые выводы касательно области определения решения задачи (2)–(3). Так, в ней говорится, что решение нельзя продолжить сколь угодно далеко, и что оно определено на отрезке конечной длины, удовлетворяющей неравенству

$$0 < r < l = 2\left(\frac{1}{\lambda} - \delta\right). \tag{4}$$

Из неравенства (4), в свою очередь, видно, как отрезок $[0, r]$ сужается при l стремящемся к нулю. С другой стороны, неравенство (4) справедливо при любом β. Причину такого поведения можно установить путем анализа численных решений задачи (2)–(3). Из графиков на рис. 3, иллюстрирующих характерный отклик решений на вариацию β, прослеживается, как уменьшение β сопровождается увеличением r.

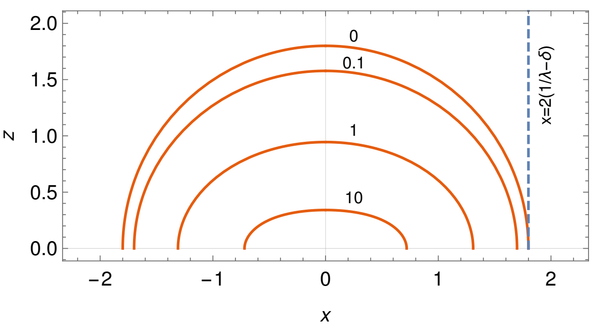

Рис. 3. Численные решения (2)–(3) при убывающих β

Но при этом r остается все время ограниченным сверху l, и только в пределе при $\beta \longrightarrow 0$ число r совпадает с l. Отметим, что случай $\beta = 0$ соответствует невесомости, и тогда задачу (2)–(3) удается решить аналитически. Решением будет служить дуга окружности с радиусом, равным, как раз, l.

Если угол наклона касательной φ принять за независимую переменную при обходе профиля капли, то математической моделью лежащей капли будет выступать система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\varphi} = \dfrac{[1-\delta(\lambda+\beta z)]\, x \sin\varphi}{x(\lambda+\beta z) - [1-\delta(\lambda+\beta z)]\sin\varphi}, \\[2ex] \dfrac{dx}{d\varphi} = \dfrac{[1-\delta(\lambda+\beta z)]\, x \cos\varphi}{x(\lambda+\beta z) - [1-\delta(\lambda+\beta z)]\sin\varphi}, \end{cases} \tag{5}$$

с начальными условиями

$$z\big|_{\varphi=0} = 0, \quad x\big|_{\varphi=0} = 0. \tag{6}$$

Доказана теорема:

Теорема 2. *Пусть выполнены требования теоремы 1. Тогда существует единственное гладкое решение задачи (5)–(6), которое возможно продолжить на отрезок* $[0, \pi]$. *При этом функция* $x = x(\varphi)$ *строго возрастает до точки* $\varphi = \pi/2$, *достигает в ней свой максимум* $r = x(\pi/2)$, *затем строго убывает до положительного* $x_p = x(\pi)$. *Функция* $z = z(\varphi)$ *на всем продолжении строго возрастает.*

Вследствие доказанной единственности решения задачи (5)–(6), каждому набору параметров $\{\lambda, \beta, \delta\}$ соответствует ровно одна лежащая капля с углом контакта $\theta \in (0, \pi]$.

Заметим, что в большинстве случаев, когда приходится иметь дело с численным моделированием лежащей капли, именно вариант параметризации по углу наклона касательной φ является оптимальным, т. к. позволяет однозначно описать весь профиль целиком, а переменная φ меняется в заранее известных пределах $[0, \theta]$.

Опираясь на модель (5)–(6), проведена серия вычислительных экспериментов по выявлению характера влияния параметров модели на равновесную форму и объем лежащей капли. Типичные для параметра λ результаты приведены на рис. 4 и 5.

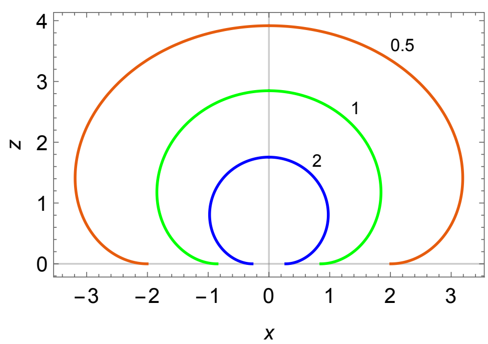

Рис. 4. Форма капли при разных λ

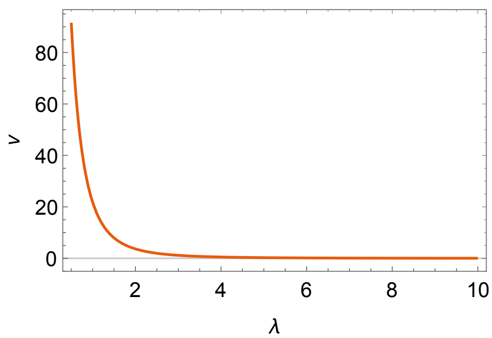

Рис. 5. Зависимость объема от λ.

Из них хорошо прослеживается, как увеличение λ сопровождается уменьшением линейных размеров капли. В свою очередь, функция $v(\lambda)$ есть строго убывающая функция с предельными значения (8)–(9):

$$\frac{dv(\lambda; \beta, \theta, \delta)}{d\lambda} < 0, \tag{7}$$

$$\lim_{\lambda \to 1/\delta} v(\lambda; \beta, \theta, \delta) = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} v(\lambda; \beta, \theta, \delta) = +\infty. \tag{9}$$

Вместе соотношения (7)–(9) позволяют утверждать, что уравнение

$$v(\lambda_0; \beta, \theta, \delta) = v_0$$

при любом $v_0 > 0$ всегда имеет решение, причем единственное. Значит, при каждом наборе параметров $\{\beta, \delta\}$ существует только одна лежащая капля с углом контакта θ и объемом v_0.

Монотонность функции $v(\lambda)$ может быть использована для решения обратной задачи, когда по известным значениям капиллярной постоянной β и длины Толмена δ требуется рассчитать профиль капли с заданными объемом v_0 и углом контакта θ. Суть предлагаемого подхода состоит в следующем. Но сперва заметим, что обратная задача всегда имеет решение, и оно единственно. Система уравнений, описывающая профиль капли, дополнятся уравнением для объема. В итоге приходим к задаче:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{d\varphi} = \dfrac{[1-\delta(\lambda+\beta z)]\, x\sin\varphi}{x(\lambda+\beta z) - [1-\delta(\lambda+\beta z)]\sin\varphi}, \\ \dfrac{dx}{d\varphi} = \dfrac{[1-\delta(\lambda+\beta z)]\, x\cos\varphi}{x(\lambda+\beta z) - [1-\delta(\lambda+\beta z)]\sin\varphi}, \\ \dfrac{dv}{d\varphi} = \dfrac{\pi x^3 [1-\delta(\lambda+\beta z)]\sin\varphi}{x(\lambda+\beta z) - [1-\delta(\lambda+\beta z)]\sin\varphi}, \end{cases} \tag{10}$$

$$z\big|_{\varphi=0} = 0, \quad x\big|_{\varphi=0} = 0, \quad v\big|_{\varphi=0} = 0. \tag{11}$$

Она содержит один свободный параметр — параметр λ. Проблему можно считать решенной, если λ подобрать так, чтобы отвечающее ему решение задачи (10)–(11) удовлетворяло граничное условие, для чего рассмотрим функцию F

$$F(\lambda) = v(\lambda; \beta, \theta, \delta) - v_0 = 0. \tag{12}$$

Функция F, очевидно, также монотонна, как и v, потому локализация корня уравнения (12) с точностью ε, например, методом бисекции или секущих, не вызывает особых трудностей. При этом новые значения функции F находятся численным решением задачи (10)–(11) на отрезке $[0, \theta]$. Примеры использования описанного выше метода приведены на рис. 6–9.

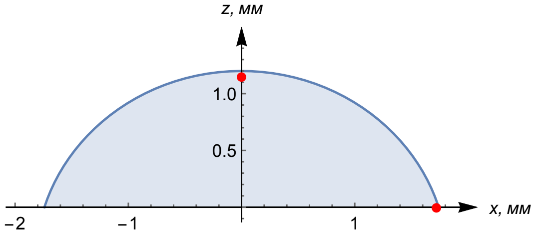

Рис. 6. Вода — углеродистая сталь

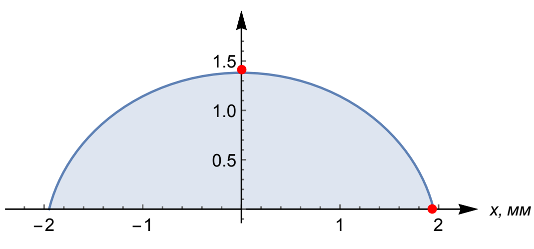

Рис. 7. Формамид — полиэтилен

По имеющимся значениям объема и угла контакта были восстановлены профили капель воды, формамида и ртути. Все данные, включая координаты красных точек, взяты из различных литературных источников и получены в ходе натурных экспериментов. В расчетах точность по объему составляла порядка $\varepsilon = 10^{-6}$. Видно, что

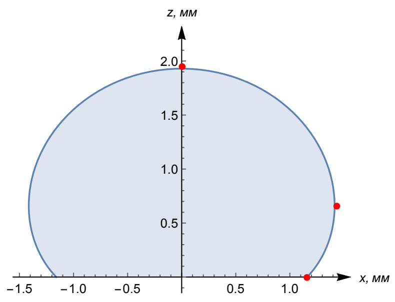

Рис. 8. Ртуть — стекло

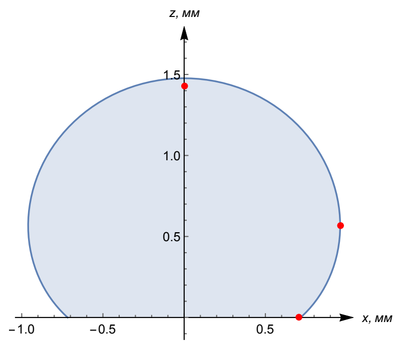

Рис. 9. Ртуть — стекло

рассчитанные профили довольно хорошо аппроксимируют экспериментальные точки. Небольшие отклонения можно связать с погрешностями измерений, потому как, если решать обратную задачу не по измеренным данным, а по заранее рассчитанным с помощью математической модели, то получится практически идеальное совпадение (рис. 10):

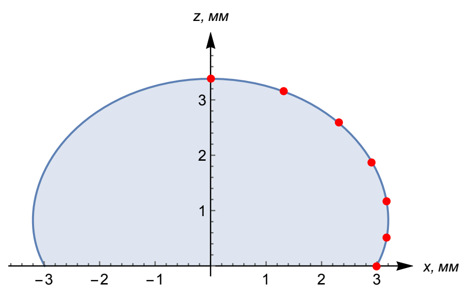

Рис. 10. Расчетный профиль теоретической капли

Далее показаны результаты численного моделирования при различных значениях капиллярной постоянной β (рис. 11 и 12).

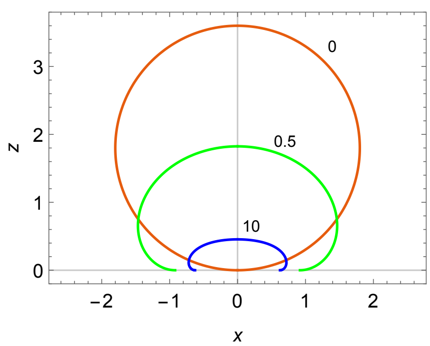

Рис. 11. Форма капли при разных β

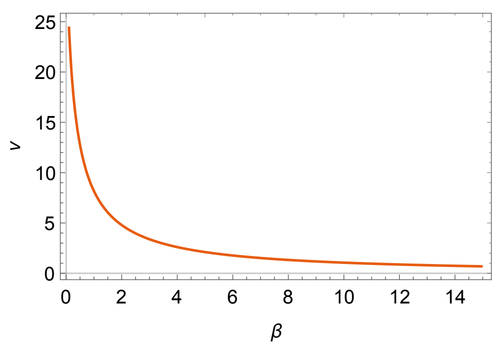

Рис. 12. Зависимость объема от β

Увеличение β также приводит к уменьшению размеров капли и строго монотонному убыванию ее объема. Однако здесь функция объема $v(\beta)$ является ограниченной с предельными значениями

$$\lim_{\beta\to 0} v(\beta;\lambda,\theta,\delta) = \widetilde{v} \le \frac{32\pi}{3}\left(\frac{1}{\lambda}-\delta\right)^3, \quad \lim_{\beta\to\infty} v(\beta;\lambda,\theta,\delta) = 0, \tag{13}$$

где $\widetilde{v}$ — объем сегмента шара радиусом $2(1-\delta\lambda)/\lambda$, опирающегося на подложку под углом θ. Из соотношений (13) следует, что уравнение

$$v(\beta;\lambda,\theta,\delta) = v_0$$

относительно β может не иметь корней в зависимости от v_0. Таким образом, произвольному набору параметров $\{\lambda,\beta\}$ не всегда соответствует капля с заданными объемом и углом контакта.

Далее идут результаты численного моделирования капель при разных длинах Толмена δ. Они и выводы из них аналогичны случаю параметра β (рис. 13-14).

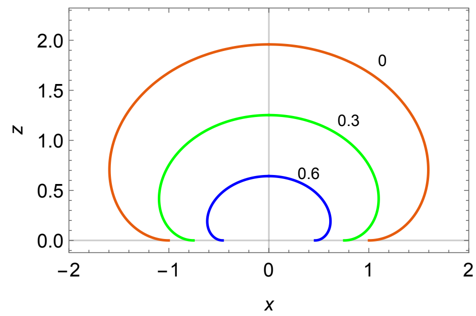

Рис. 13. Форма капли при разных δ

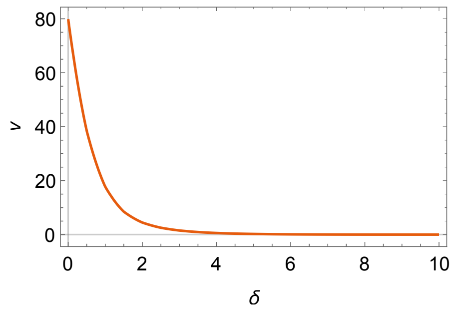

Рис. 14. Зависимость объема от δ

$$\lim_{\delta\to 1/\lambda} v(\delta;\lambda,\beta,\theta) = 0, \qquad \frac{dv(\delta;\lambda,\beta,\theta)}{d\delta} < 0,$$

$$v(\delta;\lambda,\beta,\theta) \le \lim_{\delta\to 0} v(\delta;\lambda,\beta,\theta) = v(0;\lambda,\beta,\theta).$$

Произвольному набору параметров $\{\lambda,\beta\}$ не всегда соответствует капля с заданными значениями угла контакта θ и объема v_0.

Математическая модель висящей капли

На рисунке 15 представлены поперечное сечение висящей капли, связанная с ним система координат и принятые обозначения: (x,z) — координаты точки профиля, φ — угол наклона касательной с осью x, θ — угол наклона касательной в точках контакта, s — длина дуги. Как и раньше, предполагается, что капля является телом вращения.

Профиль висящей капли описывается решением задачи [3] (рис. 15):

$$\frac{d^2z/dx^2}{\left[1+(dz/dx)^2\right]^{3/2}} + \frac{dz/dx}{x\left[1+(dz/dx)^2\right]^{1/2}} = \frac{\lambda-\beta z}{1-\delta(\lambda-\beta z)}, \tag{14}$$

$$z\big|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=0} = 0. \tag{15}$$

Существование и единственность решения задачи (14)–(15) доказаны в рамках теоремы 3.

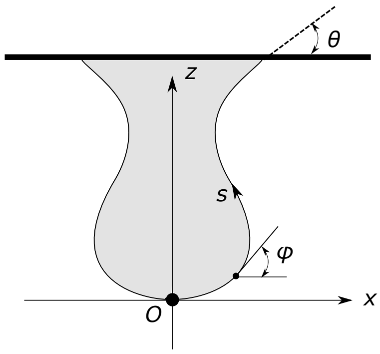

Рис. 15. Профиль висящей капли

Теорема 3. *Пусть*

$$\lambda > 0, \quad \beta > 0, \quad \delta \geq 0, \quad 1 - \delta\lambda > 0.$$

Тогда существует, притом единственное, гладкое решение уравнения (14), удовлетворяющее начальным условиям (15).

При проведении вычислительных экспериментов целесообразен переход к параметризации профиля висящей капли по длине дуги s. Тогда математическая модель капли примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{ds} = \sin\varphi, \\ \dfrac{dx}{ds} = \cos\varphi, \\ \dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{\lambda - \beta z}{1 - \delta(\lambda - \beta z)} - \dfrac{\sin\varphi}{x}, \\ \dfrac{dv}{ds} = \pi x^2 \sin\varphi, \end{cases} \tag{16}$$

$$z|_{s=0} = 0, \quad x|_{s=0} = 0, \quad \varphi|_{s=0} = 0, \quad v|_{s=0} = 0. \tag{17}$$

На рис.16-17 приведены результаты численного моделирования висящих капель при разных λ. Из них видно, что увеличение его значений ведет к постепенному

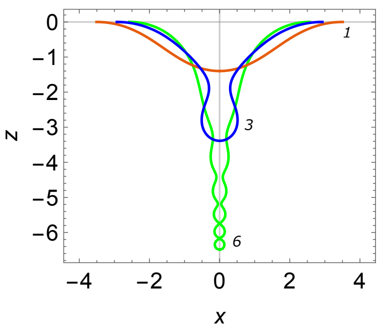

Рис. 16. Форма капли при разных λ

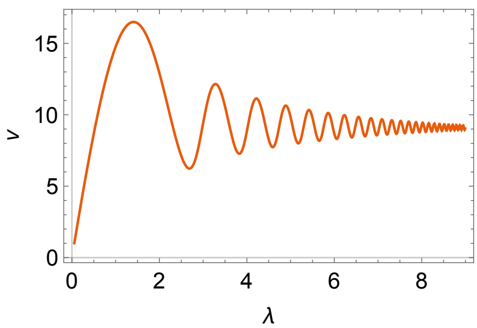

Рис. 17. Зависимость объема от λ

росту протяженности капли, а изменение объема носит осциллирующий характер. Как следует из графика (17), уравнение

$$v(\lambda; \beta, \theta, \delta) = v_0$$

относительно λ может иметь более одного корня. Поэтому в отличие от лежащей капли нельзя исключать существования нескольких висящих с заданным объемом v_0 и углом контакта θ. Также в отличие от случая лежащей капли здесь функция $v(\lambda)$ является ограниченной:

$$v(\lambda;\beta,\theta,\delta) < +\infty.$$

Результаты моделирования для параметров β и δ (рис. 18-21):

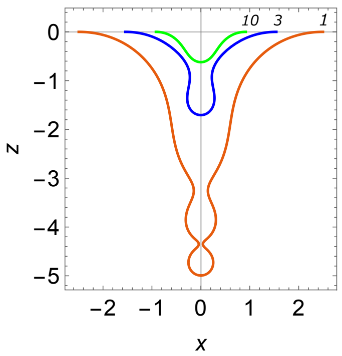

Рис. 18. Форма капли при разных β

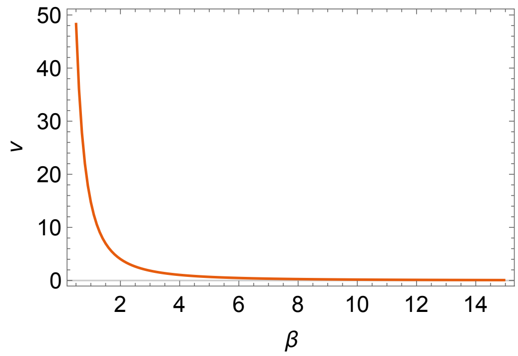

Рис. 19. Зависимость объема от β

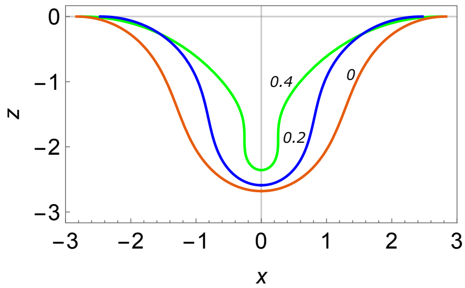

Рис. 20. Форма капли при разных δ

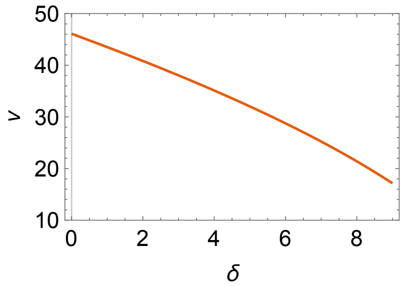

Рис. 21. Зависимость объема от δ

После перехода к безразмерным координатам придем к задаче (18)–(19) с двумя параметрами вместо трех, что облегчит дальнейший анализ:

$$\begin{cases} \dfrac{dZ}{dS} = \sin\varphi, \\ \dfrac{dX}{dS} = \cos\varphi, \\ \dfrac{d\varphi}{dS} = \dfrac{\Lambda - Z}{1-\Delta(\Lambda - Z)} - \dfrac{\sin\varphi}{X}, \\ \dfrac{dV}{dS} = \pi X^2 \sin\varphi, \end{cases} \tag{18}$$

$$Z|_{S=0} = 0, \quad X|_{S=0} = 0, \quad \varphi|_{S=0} = 0, \quad V|_{S=0} = 0. \tag{19}$$

Решение данной задачи формально продолжимо сколь угодно далеко. Однако, та часть решения, которая лежит за первой точкой максимума уже физически не реализуема. Понятно, что, если при некоторых Λ и Δ профиль капли достроить до максимальной точки $S = S_m$, ее объем только увеличится и примет вполне конкретное значение. Таким образом, получится функция максимального объема от переменных Λ и Δ:

$$V_m = V(S_m; \Lambda, \Delta).$$

Возникает вопрос: в какой точке она достигает наибольшее значение и чему оно равно? Иными словами, каков максимальный объем физически реализуемой капли? Численные расчеты показали, что функция V_m принимает наибольшее значение при Δ равном нулю и Λ близком к $\pi/2$:

$$\sup V_m = 18.964.$$

Ограниченной оказывается и функция X_m

$$X_m = X(S_m; \Lambda, \Delta),$$

определяющая радиус контакта с потолком:

$$\sup X_m = 3.832.$$

Ее максимум достигается при $\Lambda \longrightarrow 0$ и $\Delta = 0$. Возвращаясь к размерным величинам,

$$v_m \leq \frac{18.964}{\beta^{\frac{3}{2}}}, \quad x_m < \frac{3.832}{\sqrt{\beta}}.$$

Конфигурация с максимальным объемом построена ниже на рис. 22.

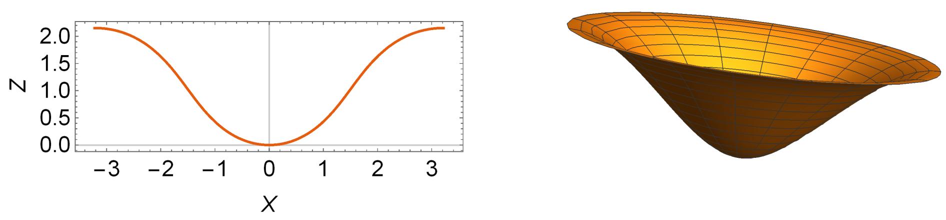

Рис. 22. Капля максимального объема

Математическая модель развернутого мениска

На рисунке 23 представлен профиль развернутого мениска. Здесь (x, z) — координаты точки профиля, $(-\varphi)$ — угол наклона касательной с осью x, x_0 — радиус контакта с верхним основанием, φ_0 — угол φ в точке контакта с верхним основанием. Он образуется вокруг твердого тела при контакте тела с жидкостью.

Профиль развернутого мениска описывается решением уравнения [2, 7] (рис. 23)

$$\frac{d^2z/dx^2}{\left[1+(dz/dx)^2\right]^{3/2}} + \frac{dz/dx}{x\left[1+(dz/dx)^2\right]^{1/2}} = -\frac{\beta z}{1+\delta\beta z}, \tag{20}$$

удовлетворяющим краевым условиям

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} = -\tan\varphi_0, \quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x\to+\infty} = 0. \tag{21}$$

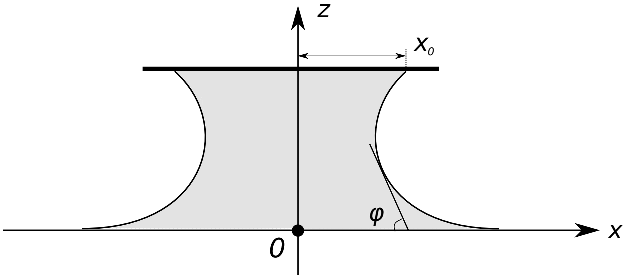

Рис. 23. Профиль развернутого мениска

Необходимость в проверке выполнимости второго условия в процессе численного решения задачи (20)–(21) доставляет некоторые неудобства. Вдобавок, производная искомой функции z может обращаться в бесконечность в начальной точке. Поэтому, чтобы избежать перечисленных неудобств, вместо задачи (20)–(21) предлагается рассматривать следующую эквивалентную ей краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\psi} = -\dfrac{(1+\delta\beta z)\,x\cos\psi}{\beta xz+(1+\delta\beta z)\sin\psi}, \\ \dfrac{dz}{d\psi} = -\dfrac{(1+\delta\beta z)\,x\sin\psi}{\beta xz+(1+\delta\beta z)\sin\psi}, \end{cases} \tag{22}$$

$$x|_{\psi=(\pi-\varphi_0)} = x_0, \quad z|_{\psi=\pi} = 0. \tag{23}$$

Последняя определена уже на конечном отрезке и численное ее решение известными методами не вызывает никаких трудностей.

Результаты вычислительных экспериментов показаны на рис. 24–26

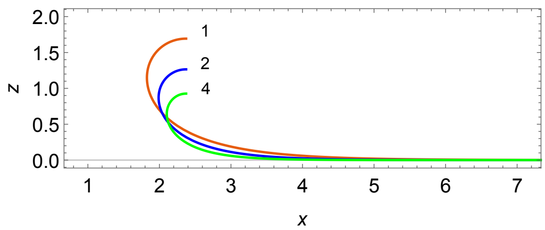

Рис. 24. Зависимость формы от β

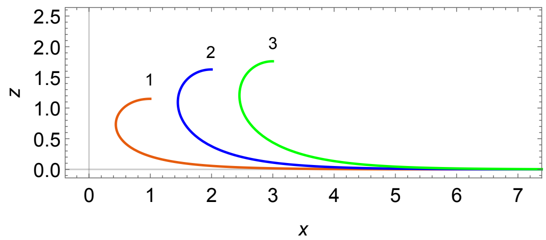

Рис. 25. Зависимость формы от x_0

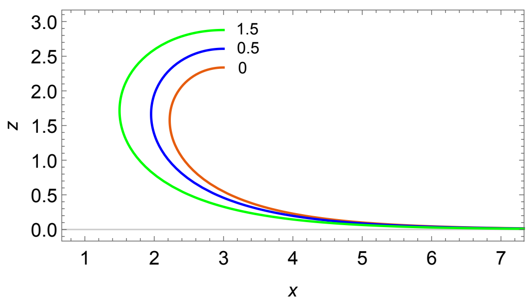

Рис. 26. Зависимость формы от δ

Заключение

Обобщение математических моделей равновесных капиллярных менисков на случай размерной зависимости поверхностного натяжения приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям с очень сложной нелинейной структурой — они ожидаемо сложнее классических. Поэтому и здесь о точном решении соответствующих начальных и краевых задач говорить не приходится. В связи с этим для моделирования профилей менисков и расчета их характеристик (площадь, объем и т. д.) остается полностью полагаться на численные методы, предварительно сведя обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) второго порядка к эквивалентным системам ОДУ порядком ниже. Далее уже становятся доступными такие хорошо зарекомендовавшие себя методы, как семейство методов Рунге–Кутты и Адамса.

Дифференциальные уравнения для лежащей и висящей капель содержат по одной сингулярной точке, которая приходится на вершины капель. Чтобы удостовериться в существовании и единственности решений задач, наиболее часто возникающих для них на практике, стандартные теоремы теории дифференциальных уравнений не подходят. Поэтому были сформулированы и доказаны теоремы, гарантирующие как существование, так и единственность решений.

В ходе анализа результатов вычислительных экспериментов определены характер и степень влияния каждого параметра математической модели на форму мениска. Наибольший интерес представляло влияние параметра, отвечающего за размерную зависимость поверхностного натяжения. Получается, что в некоторых случаях даже относительно небольшое его изменение способно привести к серьезному искажению формы мениска.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

1. Robert F. Equilibrium Capillary Surfaces. New York: Springer-Verlag, 1986. 245 pp.
2. Rusanov A. I., Prokhorov V. A. Interfacial Tensiometry. Amsterdam: Elsevier, 1996. 407 pp.
3. Bashforth F., Adams J. C. An Attempt to Test The Theories of Capillary Action by Comparing the Theoretical and Measured Forms of Drops of Fluid. London: Cambridge University Press, 1883. 158 pp.
4. Tolman R. C. The effect of droplet size on surface tension // The Journal of Chemical Physics, 1949. vol. 17, no. 3, pp. 333–337.
5. Rekhviashvili S. Sh., Sokurov A. A. Modeling of sessile droplet with the curvature dependence of surface tension // Turkish journal of physics, 2018. vol. 42, no. 6, pp. 699–705.
6. Baranov S. A., Rekhviashvili S. Sh., Sokurov A. A. Some Problems in Simulation of the Thermodynamic Properties of Droplets // Surface Engineering and Applied Electrochemistry, 2019. vol. 55, no. 3, pp. 286–293.
7. Freud B. B., Freud H. Z. A Theory of the Ring Method for the Determination of Surface Tension // Journal of the American Chemical Society, 1930. vol. 52, no. 5, pp. 1772–1782.

MSC 97N40, 97N80 Research Article

An analytical and numerical study of capillary menisci

A. A. Sokurov

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Centre of RAS, 360000, Nalchik, Shortanov st., 89A, Russia
E-mail: asokuroff@gmail.com

In the current paper we consider the mathematical models of axisymmetric capillary menisci — sessile and pendant drops, rolled out meniscus, taking into account the size dependence of surface tension. Existence and uniqueness theorems for solutions of problems describing equilibrium meniscus surfaces are proved. Effective numerical methods have been developed and tested for the approximate calculation of meniscus profiles. A computer program is written in the Wolfram Language, with the help of which large-scale computational experiments were carried out to reveal the degree and nature of the influence of the model parameters on the equilibrium shape of each type of menisci.

Key words: mathematical modeling, sessile drop, pendant drop, capillary meniscus, surface tension, size dependence, mean curvature, numerical scheme, convergence.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-80-93

Original article submitted: 15.09.2021 Revision submitted: 15.10.2021

For citation. Sokurov A. A. An analytical and numerical study of capillary menisci. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **36**: 3, 80-93. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-80-93

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.