УДК 519.21 Научная статья

Оценки скорости сходимости в предельных теоремах о переходных явлениях для ветвящихся случайных процессов

Ш. Ю. Жураев, А. Ф. Алиев

Институт математики имени В. И. Романовского АН РУз, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4Б. Узбекистан

E-mail: shukurjon4756@gmail.com, aliyev95.uz@mail.ru

В данной работе рассматриваются ветвящиеся случайные процессы с дискретным временем в двух предположениях: в начальный момент времени имеется одна частица или в начальный момент времени существует большое число частиц. В переходных явлениях для таких ветвящихся случайных процессов получены оценки скорости сходимости условных законов распределений к предельному распределению.

Ключевые слова: ветвящиеся процессы, условный закон распределения, переходные явления, большое число частиц, показательные распределения, теорема Эссена

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-15-28

Поступила в редакцию: 15.07.2021 В окончательном варианте: 03.10.2021

Для цитирования. Жураев Ш. Ю., Алиев А. Ф. Оценки скорости сходимости в предельных теоремах о переходных явлениях для ветвящихся случайных процессов // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 36. № 3. C. 15-28. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-15-28

Введение

В данной работе рассмотрим ветвящийся случайный процесс Гальтона – Ватсона, определенный рекуррентными формулами

$$Z_0 = 1,\, Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_j,\ n \geq 1,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин с неотрицательными и целочисленными значениями с общим распределением

$$P(X_1 = k) = P(Z_1 = k) = p_k,\, k = 0, 1, \ldots$$

([1], стр. 7-19).

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Пусть $F(x)$ производящая функция случайных величин X_1 т. е.

$$F(x) = Ex^{X_1} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 = k)x^k, F_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} P_n(k)x^k,\ |x| \leq 1.$$

Как известно из ([1], стр.11), имеют место равенства

$$F_n(x) = F_{n-1}(F(x)) = F(F_{n-1}(x)),\ n \geq 1.$$

Предположим, что первые факториальные моменты
$A = F^{'}(1)$, $B = F^{''}(1)$, $C = F^{'''}(1)$ конечны и

$$Q_n(x) = 1 - F_n(x);\ \ Q_n = 1 - F_n(0) = 1 - P_n(0);$$

$$S_n(A,x) = P\left\{\frac{Z_n}{E^*(n)} < x/Z_n > 0\right\},$$

где

$$E^*(n) = E(Z_n/Z_n > 0)$$

и показательная функция распределения $S(x)$ задается формулой

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

В силу изложенных рассуждений представляет особый интерес исследование асимптотического поведения ветвящихся случайных процессов близких к критическим. Впервые на эти задачи обратил внимание Б. А. Севастьянов ([2], стр. 87 - 103) где эти задачи поставлены в следующем виде: рассмотрим семейства ветвящихся случайных процессов

$$\{Z_n = Z_n(A),\ 0 < A < \infty\}$$

где параметр семейства $A = F^{'}(1)$, а $F(x)-$производящая функция числа частиц первого поколения, задающая процесс $Z_n(A)$.

Общая задача состоит в изучение предельного поведения величины $Z_n(A)$ при $n \to \infty$, $A \to 1$.

Понятно, что при $n \to \infty$, $A \to 1$ предельные теоремы вида $(a_n \to \infty)$

$$\lim_{n\to\infty, A\to 1} P(Z_n(A) < a_n x/Z_n > 0) \tag{1}$$

должны быть равномерными по определенному классу производящих функций $\{F(x) = F(x,A)\}$.

Предельные теоремы вида (1) называются **переходными явлениями** в теории ветвящихся случайных процессов и доказательство этих теорем требуют применения дополнительных математических приемов.

Б. А. Севастьяновым впервые доказаны предельные теоремы о переходных явлениях в ветвящихся случайных процессах непрерывного времени ([2], стр. 89).

Следуя Б. А. Севастьянову [2], обозначим через $K(B_0,C_0)$ класс производящих функций, удовлетворяющих условиям

$$K(B_0,C_0) = \left\{F; F^{''}(1) = B \geq B_0,\ F^{'''}(1) = C \leq C_0\right\}$$

где $B_0 > 0$, $0 \leq C_0 < \infty$.

Для таких классов было доказана следующая теорема ([2], стр. 106):

Теорема 1.1. *Выполняется равенство*

$$1 - F_n(s) = r_n(s)(1 + \eta_n(s)) \tag{2}$$

где

$$r_n(s) = \begin{cases} \frac{A^n(1-s)}{1+\frac{B}{2}\cdot\frac{A^n-1}{A-1}(1-s)}, & A \neq 1, \\ \frac{1-s}{1+\frac{Bn}{2}(1-s)}, & A = 1, \end{cases}$$

а $\eta_n(s) \to 0$ *при* $n \to \infty$, $A \to 1$ *равномерно по всем* $F(s) \in K(B_0, C_0)$ *и* $|s| \leq 1$.

Предварительно приведем следующие вспомогательные утверждения.

Введем функцию

$$g(n,A) = \sum_{j=1}^{n} A^j = \frac{A^n - 1}{A - 1}$$

определенную для целых $n \geq 2$ и положительных A.

Лемма 1.1. *Функция* $g(n,A)$ *возрастает по каждому аргументу при фиксированном втором аргументе. При всех* n *и* A *имеет место неравенство*

$$g(n,A) \geq \frac{1}{2}\min\left\{n, \frac{1}{|A-1|}\right\}.$$

Доказательство леммы 1.1 приведено в ([2], стр. 104).

В работе [4] для ветвящихся процессов, близких к критическим, т.е. для процессов из класса $K(B_0, C_0)$ для остаточного члена величины $Q_n(s) = 1 - F_n(s)$ в равенстве (2) получены асимптотические оценки, которые сформулируем в виде теоремы:

Теорема 1.2. *Пусть* $n \to \infty$, $A \to 1$ *и* $|s-1| \geq \varepsilon > 0$. *Если* $n \leq \frac{1}{|A-1|}$, *то в соотношение (2) остаточной член* $\eta_n(s)$ *имеет поведение*

$$\sup_{|s-1|\geq\varepsilon>0} |\eta_n(s)| = O\left(\max\left(\frac{1}{n}, \frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\right)\right), \tag{3}$$

а если $\frac{1}{|A-1|} \leq n$, *то*

$$\sup_{|s-1|\geq\varepsilon>0} |\eta_n(s)| = O\left(\max\left(|A-1|, \frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\right)\right) \tag{4}$$

равномерно по классу производящих функций $F(s) \in K(B_0, C_0)$.

Оценка скорости сходимости к показательному закону

В работе А. В. Нагаева и Р. Мухамедхановой [3] исследованы переходные явления в ветвящихся случайных процессах с дискретным временем (процессы Гальтона – Ватсона). В частности в этой работе доказана следующая теорема:

Теорема 2.1. *При* $n \to \infty$, $A \to 1$

$$\sup_x |S_n(A,x) - S(x)| \to 0$$

равномерно по всем $F(x) \in K(B_0, C_0)$ *и* $|x| \le 1$.

Ниже приводится доказательство теоремы об оценке скорости сходимости в теореме 2.1.

Теорема 2.2. *Если* $n \to \infty$, $A \to 1$ *и* $|x-1| \ge \varepsilon > 0$, *тогда*

$$\sup_x |S_n(A,x) - S(x)| = O\left(\ln g(n,A) \cdot \max\left(\frac{1}{n}, |A-1,| \frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\right)\right),$$

равномерно по классу производящих функций $F(x) \in K(B_0, C_0)$.

Доказательство.

Легко заметить, что условное математическое ожидание имеет вид:

$$EZ_n = E\left(Z_n I_{(Z_n=0)} + Z_n I_{(Z_n>0)}\right) = EZ_n I_{(Z_n>0)} = P(Z_n > 0) \cdot E(Z_n/Z_n > 0),$$

$$E(Z_n/Z_n > 0) = \frac{EZ_n}{P(Z_n > 0)} = \frac{A^n}{Q_n}.$$

Далее, характеристическая функция $\varphi_n(t)$ условного распределение $S_n(A,x)$ равна:

$$\varphi_n(t) = E\left(e^{itZ_nQ_nA^{-n}}/Z_n > 0\right) = \frac{E\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right)^{Z_n} - E\left(\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right)^{Z_n}/Z_n = 0\right)}{P(Z_n > 0)} =$$

$$= \frac{F_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right) - F_n(0)}{Q_n} = \frac{1 - Q_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right) - 1 + Q_n}{Q_n} = 1 - \frac{Q_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right)}{Q_n}.$$

здесь ([2], стр.107)

$$Q_n \sim \begin{cases} \frac{A^n}{1+\frac{B}{2}g(n,A)}, & A \ne 1, \\ \frac{1}{1+\frac{Bn}{2}}, & A = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Вычислим $Q_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right)$. Для этого сначала вычислим величину $r_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right)$

$$r_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right) = \frac{A^n\left(1 - e^{itQ_nA^{-n}}\right)}{1 + \frac{B}{2}g(n,A)\left(1 - e^{itQ_nA^{-n}}\right)} =$$

$$= \frac{A^n\left(-itQ_nA^{-n} + O\left(\frac{t^2}{2}Q_n^2A^{-2n}\right)\right)}{1 + \frac{B}{2}g(n,A)\left(-itQ_nA^{-n} + O\left(\frac{t^2}{2}Q_n^2A^{-2n}\right)\right)}. \tag{6}$$

Пользуясь асимптотической формулой (5) для вероятности продолжения процесса Q_n будем иметь:

$$r_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right) = \frac{-\frac{itA^n}{1+\frac{B}{2}g(n,A)} + O\left(\frac{t^2A^n}{2\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)^2}\right)}{1 + \frac{B}{2}g(n,A)\left[-\frac{it}{1+\frac{B}{2}g(n,A)} + O\left(\frac{t^2}{2\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)^2}\right)\right]} =$$

$$= \frac{A^n\left(-it + O\left(\frac{t^2}{2\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)\right)}{1+\frac{B}{2}g(n,A)(1-it) + O\left(\frac{Bt^2 g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)}. \tag{7}$$

Пользуясь Теоремой 1.2, учитывая равенство (7), найдем характеристическую функцию $\varphi_n(t)$ условного распределения $S_n(A,x)$:

$$\varphi_n(t) = 1 - \frac{1}{Q_n} Q_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1+\frac{B}{2}g(n,A)}{A^n} \cdot \frac{A^n\left(-it + O\left(\frac{t^2}{2\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)\right)}{\frac{B}{2}g(n,A)(1-it) + 1 + O\left(\frac{Bt^2 g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)}\left(1+\eta_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right)\right) =$$

$$= 1 - \frac{\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)\left(-it + O\left(\frac{t^2}{2\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)\right)\left(1+\eta_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right)\right)}{\frac{B}{2}g(n,A)(1-it) + 1 + O\left(\frac{Bt^2 g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{B}{2}g(n,A) + 1 + it + O\left(-\frac{t^2}{2}\right) + O\left(\frac{Bt^2 g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)}{\frac{B}{2}g(n,A)(1-it) + 1 + O\left(\frac{Bt^2 g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)} +$$

$$+ \frac{\left[\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)it + O\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right]\eta_n\left(e^{itQ_nA^{-n}}\right)}{\frac{B}{2}g(n,A)(1-it) + 1 + O\left(\frac{Bt^2 g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)} = I_1 + I_2 \tag{8}$$

При вычисление дробных величин I_1 и I_2 нам следует выполнять деление с остатком. Для величины I_1 легко получаем:

$$I_1 = \frac{\frac{B}{2}g(n,A) + 1 + it + O\left(-\frac{t^2}{2}\right) + O\left(\frac{Bt^2 g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)}{\frac{B}{2}g(n,A)(1-it) + 1 + O\left(\frac{Bt^2 g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{B}{2}g(n,A) + 1 + it + O\left(-\frac{t^2}{2\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)}{\frac{B}{2}g(n,A)(1-it) + 1 + O\left(\frac{Bt^2 g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1-it} + \frac{2t^2}{Bg(n,A)(1-it)^2} + O\left(\frac{-t^2}{2(1-it)} \cdot \frac{2}{Bg(n,A)\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right) \tag{9}$$

При вычисление I_2 следует учеть поведение бесконечно малой функции $\eta_n(A,x)$ в теореме 1.2.

Пусть выполнено условие (3). Тогда будем иметь:

$$I_2=\frac{\left(O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\right)\right)\left(it\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)+O\left(\frac{-t^2}{2}\right)\right)}{\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\left(1-it\right)+1+O\left(\frac{Bt^2g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)}=$$

$$=\frac{O\left(it\frac{1+\frac{B}{2}g(n,A)}{n}\right)+O\left(\frac{-t^2}{2n}\right)+O\left(it\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)\frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\right)+O\left(\frac{-t^2}{2}\cdot\frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\right)}{\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\left(1-it\right)+1+O\left(\frac{Bt^2g(n,A)}{4\left(1+\frac{B}{2}g(n,A)\right)}\right)}=$$

$$=O\left(\frac{it}{1-it}\frac{\ln g\left(n,A\right)}{\frac{B}{2}g^2\left(n,A\right)}\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)\right)+O\left(\frac{it}{1-it}\cdot\frac{1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)}{\frac{B}{2}ng\left(n,A\right)}\right)+$$

$$+O\left(\frac{-t^2}{2\left(1-it\right)}\cdot\frac{\ln g\left(n,A\right)}{\frac{B}{2}g^2\left(n,A\right)}\right)+O\left(\frac{-t^2}{2\left(1-it\right)}\cdot\frac{1}{\frac{B}{2}ng\left(n,A\right)}\right). \tag{10}$$

Таким образом, из соотношений (8)-(10) для характеристической функции $\varphi_n\left(t\right)$ легко получим:

$$\varphi_n\left(t\right)=I_1+I_2=\frac{1}{1-it}+\frac{t^2}{\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\left(1-it\right)^2}+O\left(\frac{-t^2}{2\left(1-it\right)}\cdot\frac{2}{Bg\left(n,A\right)\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)}\right)+$$

$$+O\left(\frac{it}{1-it}\frac{\ln g\left(n,A\right)}{\frac{B}{2}g^2\left(n,A\right)}\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)\right)+O\left(\frac{it}{1-it}\cdot\frac{1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)}{\frac{B}{2}ng\left(n,A\right)}\right)+$$

$$+O\left(\frac{-t^2}{2\left(1-it\right)}\cdot\frac{\ln g\left(n,A\right)}{\frac{B}{2}g^2\left(n,A\right)}\right)+O\left(\frac{-t^2}{2\left(1-it\right)}\cdot\frac{1}{\frac{B}{2}ng\left(n,A\right)}\right). \tag{11}$$

Теперь пользуясь теоремой Эссена оценим скорость сходимости условного распределения $S_n\left(A,x\right)$ к показательному распределению $S\left(x\right)$ ([5], §39, теорему 1):

$$\left|S_n\left(A,x\right)-S\left(x\right)\right|\leq\frac{c}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\varphi_n\left(t\right)-\phi\left(t\right)}{t}\right|dt+\frac{C}{T} \tag{12}$$

где c, $C-$ константа, $T=\delta\frac{A^n}{Q_n}$, $\delta-$ достаточно мало.

Напомним, что $\phi\left(t\right)=\frac{1}{1-it}-$ есть характеристическая функция распределения $S\left(x\right)$.

Отсюда имеем:

$$\sup_x\left|S_n\left(A,x\right)-S\left(x\right)\right|\leq$$

$$\leq\frac{c}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{t}{\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\left(1-it\right)^2}\right|dt+O\left(\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{-t}{\left(1-it\right)}\cdot\frac{1}{Bg\left(n,A\right)\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)}\right|dt\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{i}{1-it}\frac{\ln g\left(n,A\right)}{\frac{B}{2}g^2\left(n,A\right)}\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)\right|dt\right)+O\left(\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{i}{1-it}\cdot\frac{1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)}{\frac{B}{2}ng\left(n,A\right)}\right|dt\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{-t}{2\left(1-it\right)}\cdot\frac{\ln g\left(n,A\right)}{\frac{B}{2}g^{2}\left(n,A\right)}\right|dt\right)+O\left(\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{-t}{2\left(1-it\right)}\cdot\frac{1}{\frac{B}{2}ng\left(n,A\right)}\right|dt\right)+\frac{C}{T}=$$

$$=O\left(\frac{\ln^{2}g\left(n,A\right)}{g\left(n,A\right)}\right)+O\left(\frac{\ln g\left(n,A\right)}{n}\right).$$

Если выполнено условие (4), то величина I_2 имеет вид:

$$I_{2}=\frac{O\left(it\left|A-1\right|\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)\right)+O\left(\frac{-t^{2}}{2}\left|A-1\right|\right)}{\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\left(1-it\right)+1+O\left(\frac{t^{2}g(n,A)}{1+\frac{B}{2}g(n,A)}\right)}+$$

$$+\frac{O\left(it\frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)\right)+O\left(\frac{-t^{2}\ln g(n,A)}{2g(n,A)}\right)}{\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\left(1-it\right)+1+O\left(\frac{t^{2}g(n,A)}{1+\frac{B}{2}g(n,A)}\right)}=$$

$$=\frac{O\left(it\left|A-1\right|\cdot\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)+O\left(it\frac{B}{2}\ln g\left(n,A\right)\right)+O\left(\frac{-t^{2}}{2}\left|A-1\right|\right)+O\left(\frac{-t^{2}}{2}\frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\right)}{\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\left(1-it\right)+1+O\left(\frac{t^{2}g(n,A)}{1+\frac{B}{2}g(n,A)}\right)}=$$

$$=O\left(\frac{it}{1-it}\left|A-1\right|\right)+O\left(\frac{it}{1-it}\frac{\ln g\left(n,A\right)}{g\left(n,A\right)}\right)+$$

$$+O\left(\frac{-t^{2}}{\left(1-it\right)}\frac{\left|A-1\right|}{Bg\left(n,A\right)}\right)+O\left(\frac{-t^{2}}{\left(1-it\right)}\frac{\ln g\left(n,A\right)}{Bg^{2}\left(n,A\right)}\right).\qquad(13)$$

Из соотношений (8), (9) и (13) легко следует, что

$$\varphi_{n}\left(t\right)=I_{1}+I_{2}=\frac{1}{1-it}+\frac{t^{2}}{\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\left(1-it\right)^{2}}+O\left(\frac{it}{1-it}\frac{\ln g\left(n,A\right)}{g\left(n,A\right)}\right)+$$

$$+O\left(\frac{-t^{2}}{2\left(1-it\right)}\cdot\frac{2}{Bg\left(n,A\right)\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)}\right)+O\left(\frac{it}{1-it}\left|A-1\right|\right)+$$

$$+O\left(\frac{it}{1-it}\frac{\ln g\left(n,A\right)}{g\left(n,A\right)}\right)+O\left(\frac{-t^{2}}{\left(1-it\right)}\frac{\left|A-1\right|}{Bg\left(n,A\right)}\right)+O\left(\frac{-t^{2}}{\left(1-it\right)}\frac{\ln g\left(n,A\right)}{Bg^{2}\left(n,A\right)}\right)\qquad(14)$$

Подставляя равенство (12) в неравенство (12) легко получим:

$$\sup_{x}\left|S_{n}\left(A,x\right)-S\left(x\right)\right|\leq\frac{c}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{t}{\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\left(1-it\right)^{2}}\right|dt+$$

$$+O\left(\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{-t}{\left(1-it\right)}\cdot\frac{1}{Bg\left(n,A\right)\left(1+\frac{B}{2}g\left(n,A\right)\right)}\right|dt\right)+O\left(\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{i}{1-it}\cdot\left(A-1\right)\right|dt\right)+$$

$$+O\left(\int_{-T}^{T}\left|\frac{i}{1-it}\cdot\frac{\ln g\left(n,A\right)}{g\left(n,A\right)}\right|dt\right)+O\left(\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{-t}{\left(1-it\right)}\cdot\frac{\ln g\left(n,A\right)}{Bg^{2}\left(n,A\right)}\right|dt\right)+$$

$$+O\left(\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{-t}{(1-it)}\cdot\frac{A-1}{Bg(n,A)}\right|dt\right)+\frac{C}{T}=O\left(|A-1|\cdot\ln g(n,A)\right)+O\left(\frac{\ln^2 g(n,A)}{g(n,A)}\right).$$

Теорема 2.2. доказана полностью. □

Переходные явления в процессах, начинающихся с большого числа частиц

Пусть в начале процесса имеется k частиц. Обозначим ν число частиц к моменту времени n, если процесс начался с k частиц. В этом случае

$$\nu=Z_1(n)+Z_2(n)+\ldots+Z_k(n) \tag{15}$$

где $Z_i(n)$ — число частиц, произведенное i—й частицей за время n. Пусть случайная величина ρ означает число положительных слагаемых в (15) в момент времени n. Случайная величина ρ имеет биномиальное распределение

$$P\{\rho=r\}=C_k^r Q^r(1-Q)^{k-r},\quad Q=Q_n, 0\le r\le k$$

с математическим ожиданием $\rho=kQ$. Далее при $n\to\infty, A\to 1$ имеем

$$E\rho\sim kQ_n=\gamma=\begin{cases}\frac{kA^n}{1+\frac{B}{2}\cdot\frac{1-A^n}{1-A}}, & A\neq 1,\\ \frac{k}{1+\frac{Bn}{2}}, & A=1.\end{cases} \tag{16}$$

Обозначим

$$\overline{Q}=P\{\nu>0\}=1-(1-Q)^k$$

$$\overline{E}=E\nu=kA^n$$

$$\overline{E}^*=E(\nu/\nu>0)=\frac{\overline{E}}{\overline{Q}}=\frac{kA^n}{1-(1-Q)^k}.$$

Будем изучать условный закон распределения

$$H_{n,k}(A,x)=P\left\{\frac{\nu}{\overline{E}^*}\le x/\nu>0\right\}$$

случайной величины $\zeta=\frac{\nu}{\overline{E}^*}$ при условии, что $\zeta>0$. Характеристическая функция распределения $H_{n,k}(A,x)$ равна

$$\psi_n(\tau)=E\left(\exp\left\{\frac{i\tau\nu}{\overline{E}^*}\right\}/\nu>0\right)=\frac{\left[F_n\left(\exp\left\{\frac{i\tau}{\overline{E}^*}\right\}\right)\right]^k-(F_n(0))^k}{1-(F_n(0))^k}. \tag{17}$$

Здесь

$$F_n\left(\exp\left\{\frac{i\tau}{\overline{E}^*}\right\}\right)=1-Q_n+Q_n\cdot\varphi_n\left(\tau\frac{1-(1-Q)^k}{kQ}\right), \tag{18}$$

где $\varphi_n(\tau)$ — характеристическая функция условного распределения $S_n(A,x)$.

Из (17) и (15) следует, что

$$\psi_n(\tau) = \frac{\left[1 - Q_n + Q_n \cdot \varphi_n\left(\tau \frac{1-(1-Q_n)^k}{kQ_n}\right)\right]^k - (1-Q_n)^k}{1-(1-Q_n)^k}. \tag{19}$$

Далее, введем обозначения $\frac{1-(1-Q)^k}{kQ} = a$, $\max\left(\frac{\ln g}{g}, \frac{1}{n}\right) = l$, где $g(n,A) = g$ определено в лемме 1.1.

Теорема 3.1.

Если $k \to \infty$, $A \to 1$, $n \to \infty$ так, что γ постоянно и $0 < \gamma < \infty$, то равномерно для всех $F(x) \in K(B_0, C_0)$

$$\sup_x \left|H_{n,k}(A,x) - h(x,\gamma)\right| \to 0,$$

где

$$h(x,\gamma) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{\gamma e^{-\gamma}}{(1-e^{-\gamma})^{\frac{3}{2}}} \int_0^x y^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{y\gamma}{1-e^{-\gamma}}\right\} I\left(2\gamma\sqrt{\frac{y}{1-e^{-\gamma}}}\right) dy, & x > 0 \end{cases},$$

а

$I(y) = \frac{y}{2} + \frac{1}{1!2!}\left(\frac{y}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{y}{2}\right)^5 + \ldots$ *– функция Бесселя.*

Эта теорема было доказана Б. А. Севастьяновым для ветвящихся процессов с непрерывным временем ([2], стр. 97)

Ниже приводится доказательство теоремы об оценке скорости сходимости в Теореме 3.1.

Теорема 3.2. *Если $k \to \infty$, $A \to 1$, $n \to \infty$ и $kQ \to \gamma$, то*

$$\sup_x \left|H_{n,k}(A,x) - h(x,\gamma)\right| = O\left(\ln g(n,A) \cdot \max\left(\frac{1}{n}, |A-1|, \frac{\ln g(n,A)}{g(n,A)}\right)\right),$$

равномерно по всем $0 < \gamma < \infty$ и $F(x) \in K(B_0, C_0)$

Доказательство.

Учитывая содержание Теоремы 1.2, доказательство нашей теоремы разделим на две части. Пусть сначала выполнено равенство (3). Тогда в силу теоремы 2.2 получаем

$$\varphi_n(\tau) = \frac{1}{1-i\tau} + \frac{\tau^2}{\frac{B}{2} g (1-i\tau)^2} + O\left(\frac{i\tau}{1-i\tau} l\right).$$

По условию

$$kQ \to \gamma; (1-Q)^k \to e^{-\gamma}, \tag{20}$$

обозначая

$$\frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma} = a; \quad \frac{e^{-\gamma}}{1-e^{-\gamma}} = b \tag{21}$$

получаем

$$\psi_n(\tau) \to \psi(\tau,\gamma) = b\left(e^{\frac{\gamma}{1-ia\tau}} - 1\right) = b\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m!(1-ia\tau)^m}.$$

Таким образом, из соотношения (16) следует, что

$$\left[1 - Q + Q\varphi_n\left(\tau \frac{1-(1-Q)^k}{kQ}\right)\right]^k \to e^{\gamma\left(\varphi_n\left(\tau\frac{1-e^{-\gamma}}{\gamma}\right)-1\right)} = e^{\gamma(\varphi_n(\tau a)-1)} \tag{22}$$

Из (20), (21) и пользуясь равенством $(1+x)^m = 1+mx+o(x),\quad x\to 0$, подставляя (22) в соотношение (16) будем иметь:

$$\psi_n(\tau) = \frac{e^{\gamma(\varphi_n(\tau a)-1)} - e^{-\gamma}}{1-e^{-\gamma}} = \frac{e^{-\gamma}}{1-e^{-\gamma}}\left[e^{\gamma\varphi_n(\tau a)} - 1\right] = b\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left[\gamma\varphi_n(\tau a)\right]^m =$$

$$= b\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left[\gamma\left(\frac{1}{1-i\tau a} + \frac{\tau^2}{\frac{B}{2}g(1-i\tau a)^2} + O\left(\frac{i\tau a}{1-i\tau a}l\right)\right)\right]^m =$$

$$= b\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\gamma^m}{(1-i\tau a)^m}\left[1 + \frac{t^2}{\frac{B}{2}g(1-i\tau a)} + O(i\tau a\cdot l)\right]^m =$$

$$= b\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\gamma^m}{(1-i\tau a)^m}\left[1 + m\left(\frac{\tau^2}{\frac{B}{2}g(1-i\tau a)} + O(i\tau a\cdot l)\right) + o\left(\frac{\tau^2}{\frac{B}{2}g(1-i\tau a)} + O(i\tau a\cdot l)\right)\right] =$$

$$= b\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\gamma^m}{(1-i\tau a)^m} + \frac{b}{\frac{B}{2}g}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\gamma^m\tau^2}{(1-i\tau a)^{m+1}} + O\left(bl\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\gamma^m i\tau a}{(1-i\tau a)^m}\right) +$$

$$+ o\left(b\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\frac{\gamma^m}{(1-i\tau a)^m}\cdot\left(\frac{\tau^2}{\frac{B}{2}g(1-i\tau a)} + O(i\tau a\cdot l)\right)\right) \tag{23}$$

Так как $\psi(\tau,\gamma) = b\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{\gamma^m}{m!(1-ia\tau)^m}$ есть характеристическая функция распределения $h(x,\gamma)$, то подставляя соотношение (23) в неравенство Эссена легко получаем

$$\sup_x\left|H_{n,k}(A,x) - h(x,\gamma)\right| \le \frac{c}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{\psi_n(\tau)-\psi(\tau,\gamma)}{\tau}\right|d\tau + \frac{C}{T} =$$

$$= \frac{c}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left|\frac{b}{\frac{B}{2}g}\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\gamma^m\tau}{(1-i\tau a)^{m+1}}\right|d\tau +$$

$$+ O\left(bh\cdot\int_{-T}^{T}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\gamma^m ia}{(1-i\tau a)^m}\right|d\tau\right) + \frac{C}{T}, \tag{24}$$

здесь

$$\gamma = kQ_n = \frac{kA^n}{1+\frac{B}{2}g};\quad T = \frac{kA^n}{1-e^{-\gamma}};\ \ aT = \left(1+\frac{B}{2}g\right). \tag{25}$$

Теперь нам следует оценить интегралы в неравенстве (24). При этом воспользуемся неравенством $|e^x-1| \le |x|\cdot e^{|x|}$.

$$1)\ \frac{b}{\frac{B}{2}g}\cdot\int_{-T}^{T}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\gamma^m\tau}{(1-i\tau a)^{m+1}}\right|d\tau =$$

$$= \frac{b}{\frac{B}{2}g}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\gamma\tau}{(1-i\tau a)^2}+\frac{\gamma\tau}{(1-i\tau a)^2}\cdot\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\gamma^{m-1}\tau}{(1-i\tau a)^{m-1}}\right|d\tau \le$$

$$\le \frac{b}{\frac{B}{2}g}\left[\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\gamma\tau}{(1-i\tau a)^2}\right|d\tau+\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\gamma\tau}{(1-i\tau a)^2}\cdot\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\gamma^{m-1}\tau}{(1-i\tau a)^{m-1}}\right|d\tau\right]=$$

$$= \frac{b\gamma}{\frac{B}{2}g}\int\limits_{-T}^{T}\frac{|\tau|}{1+a^2\tau^2}d\tau+\frac{b}{\frac{B}{2}g}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\gamma}{(1-i\tau a)^2}\right|\left|e^{\frac{\gamma}{1-i\tau a}}-1\right||\tau|\,d\tau \le$$

$$\le \frac{2b\gamma}{\frac{B}{2}g}\int\limits_{0}^{T}\frac{\tau}{1+a^2\tau^2}d\tau+\frac{b}{\frac{B}{2}g}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\gamma^2}{(1-i\tau a)^3}\right|\cdot e^{\left|\frac{\gamma}{1-i\tau a}\right|}|\tau|\,d\tau=$$

$$= \frac{2b\gamma}{\frac{B}{2}g}\cdot\int\limits_{0}^{T}\frac{\tau}{\frac{1}{a^2}+\tau^2}d\tau+\frac{ba^2}{\frac{B}{2}g\gamma}\int\limits_{-T}^{T}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+a^2\tau^2}}\right)^3\cdot e^{\frac{\gamma}{\sqrt{1+a^2\tau^2}}}|\tau|\,d\tau=$$

$$= \frac{2b\gamma}{\frac{B}{2}g}\ln\left(1+\left(1+\frac{B}{2}g\right)^2\right)+\frac{2ba^2}{\frac{B}{2}g\gamma}\int\limits_{0}^{T}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+a^2\tau^2}}\right)^3\cdot e^{\frac{\gamma}{\sqrt{1+a^2\tau^2}}}\tau d\tau \le$$

$$\le \frac{2b\gamma}{\frac{B}{2}g}\left(\ln\left(1+\left(1+\frac{B}{2}g\right)^2\right)+e^{\gamma}-e^{\frac{\gamma}{\sqrt{1+\left(1+\frac{B}{2}g\right)^2}}}\right) \qquad (26)$$

Отметим, что при вычислении интеграла $\int\limits_0^T\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+a^2\tau^2}}\right)^3\cdot e^{\frac{\gamma}{\sqrt{1+a^2\tau^2}}}\tau d\tau$ в соотношении (26) применим метод замены переменных. При этом пользуемся

$$\frac{\gamma}{\sqrt{1+\tau^2a^2}}=s;\quad \tau=\sqrt{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\gamma^2}{s^2}-1\right)};\quad d\tau=\frac{-\gamma^2ds}{as^2\cdot\sqrt{\gamma^2-s^2}}$$

$$\int\limits_{0}^{T}\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+a^2\tau^2}}\right)^3\cdot e^{\frac{\gamma}{\sqrt{1+a^2\tau^2}}}\tau d\tau=\int\limits_{\gamma}^{\frac{\gamma}{\sqrt{1+T^2a^2}}}s^3\cdot e^s\cdot\frac{-\gamma^2ds}{as^2\cdot\sqrt{\gamma^2-s^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\gamma^2}{s^2}-1\right)}=$$

$$=\frac{\gamma^2}{a^2}\left(e^{\gamma}-e^{\frac{\gamma}{\sqrt{1+\left(1+\frac{B}{2}g\right)^2}}}\right).$$

$$2)\ abl\int\limits_{-T}^{T}\left|\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\gamma^m}{(1-i\tau a)^m}\right|d\tau=$$

$$= abl\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\gamma}{1-i\tau a}+\frac{\gamma}{1-i\tau a}\cdot\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\gamma^{m-1}}{(1-i\tau a)^{m-1}}\right|d\tau \le$$

$$\leq abl\left[\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\gamma}{1-i\tau a}\right|d\tau+\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\gamma}{1-i\tau a}\cdot\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\gamma^{m-1}}{(1-i\tau a)^{m-1}}\right|d\tau\right]=$$

$$=abl\int_{-T}^{T}\frac{\gamma d\tau}{\sqrt{1+\tau^2a^2}}+abl\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{\gamma}{1-i\tau a}\right|\left|e^{\frac{\gamma}{1-i\tau a}}-1\right|d\tau\leq$$

$$\leq\frac{2e^{-\gamma}}{a^2}l\int\limits_{0}^{T}\frac{d\tau}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\tau^2}}+\frac{2\gamma}{a^2}l\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{B}{2}g\right)^2}}\right)=$$

$$=\frac{2}{a}l\left[e^{-\gamma}\ln g\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{g^2}}\right)+\frac{\gamma}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+\left(1+\frac{B}{2}g\right)^2}}\right)\right].\qquad(27)$$

Таким образом, из соотношений (24), (26) и (27) легко следует, что

$$\sup_x\left|H_{n,k}(A,x)-h(x,\gamma)\right|\leq\frac{8b\gamma}{\pi Bg}\left(\ln\left(1+g^2\right)+e^{\gamma}-e^{\frac{\gamma}{\sqrt{1+g^2}}}\right)+$$

$$+O\left(\frac{2}{a}l\left[e^{-\gamma}\ln g\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{g^2}}\right)+\frac{\gamma}{a}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\right)\right]\right)+\frac{C\left(1-e^{-\gamma}\right)}{\gamma g}+\frac{C}{T}$$

Из этого неравенства легко следует утверждение Теоремы 3.2 при условии (3). Вполне аналогично доказывается теорема при условии (4). Теорема 3.2 доказана. □

Заключение

Пусть условный закон распределения для ветвящихся случайных процессов $Z_0 = 1$, $Z_n=\sum\limits_{j=1}^{Z_{n-1}}X_j,\ n\geq 1$

$$S_n(A,x)=P\left\{\frac{Z_n}{E^*(n)}<x/Z_n>0\right\},$$

где

$$E^*(n)=E\left(Z_n/Z_n>0\right),$$

при $n\to\infty$ слабо сходится к предельному распределению:

$$\lim_{n\to\infty}S_n(A,x)=S(x).$$

Известно, что для критических процессов

$$S(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ 1-e^{-x}, & x>0.\end{cases}$$

Такая слабая сходимость также была доказана в переходных явлениях для ветвящихся случайных процессов близких к критическому. Для процессов с непрерывным временем предельные теоремы были доказаны Б. А. Севастьяновом [2, С. 87-103], а для процессов с дискретным временем аналогичные предельные теоремы доказаны в работах С. В. Нагаева и Р. Мухамедхановой ([3]).

Однако, в этих доказанных предельных теоремах скорости сходимости условного закона распределения к предельному мало изучены. Исходя из этого обстоятельства мы получили скорости сходимости условного закона распределения $S_n(A,x)$ к показательному распределению $S(x)$.

Аналогично, как известно, асимптотические свойства в переходных явлениях для ветвящихся случайных процессов, начинающегося с большого числа частиц, также были изучены и доказаны некоторые замечательные предельные теоремы [2, С. 96-103]. В этой заметке также получены скорости сходимости для некоторых доказанных предельных теорем. При получение скорости сходимости для рассматриваемых предельных теорем были использованы методы характеристических функций. Полученные оценки скорости сходимости предельных теорем в переходных явлениях для ветвящихся случайных процессов может быть использованы при доказательстве других предельных теорем, касающихся переходных явлений рассматриваемых ветвящихся случайных процессов.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы/References

1. Ватутин В. А. *Ветвящиеся процессы и их приложения*, Лекционные курсы НОЦ, Т. 8. М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2008. 103 с. [Vatutin V. A. Vetvyashchiyesya protsessy i ikh prilozheniya, Lektsionnyye kursy NOTS, vol. 8. M.: Matematicheskiy institut im. V. A. Steklova RAN, 2008. 103 pp. (In Russian)]
2. Севастьянов Б. А. *Ветвящиеся процессы.* Москва: Наука, 1971. 436 с. [Sevast'yanov B. A. Vetvyashchiyesya protsessy. Moskva: Nauka, 1971. 436 pp. (In Russian)]
3. Нагаев А. В., Мухамедханова Р. Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся случайных процессов / *Предельные теоремы и статистические выводы.* Ташкент, 1966, С. 90-112. [Nagayev A. V., Mukhamedkhanova R. Nekotoryye predel'nyye teoremy iz teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov / Predel'nyye teoremy i statisticheskiye vyvody. Tashkent, 1966, pp. 90-112 (In Russian)].
4. Formanov Sh. K., Juraev Sh. Yu. Estimation of the degree of convergence in limit theorems on transition phenomena for the branching random processes // Uzbek mathematical journal, 2020. vol. 4, pp. 32-39.
5. Гнеденко Б. В., Колмогоров А.Н. *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* Москва: Наука, 1949. 211 с. [Gnedenko B. V., Kolmogorov A.N. Predel'nyye raspredeleniya dlya summ nezavisimykh sluchaynykh velichin. Moskva: Nauka, 1949. 211 pp. (In Russian)]

MSC 60J80 Research Article

Estimates of the convergence rate in the limit theorems on transition phenomena for branching random processes

Sh. Yu. Jurayev, A. F. Aliyev

Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky, Academy of Sciences, 100174, Tashkent, University str. 4, Uzbekistan

E-mail: shukurjon4756@gmail.com, aliyev95.uz@mail.ru

We consider branching random processes with discrete time in two assumptions: at the initial moment of time there is one particle and there are large number of particles. In transition phenomena for such branching random processes, estimates of the convergence rate of conditional distributions are obtained.

Key words: branching processes, conditional distribution, transition phenomena, a large number of particles, exponential distribution, Essen's theorem

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-15-28

Original article submitted: 15.07.2021 Revision submitted: 03.10.2021

For citation. Jurayev Sh. Yu., Aliyev A. F. Estimates of the convergence rate in the limit theorems on transition phenomena for branching random processes. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **36**: 3, 15-28. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-15-28

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.