УДК 517.956 Научная статья

Нелокальная задача для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области

Р. Т. Зуннунов

Институт Математики АН РУз, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4б, Узбекистан

E-mail: zunnunov@mail.ru

В данной статье изучена нелокальная задача для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области эллиптическая часть которой является верхней полуплоскостью. Единственность решения поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Существование решения поставленной задачи доказана методом функций Грина и интегральных уравнений.

Ключевые слова: нелокальная задача, неограниченная область, обобщенное уравнение Трикоми со спектральным параметром, метод интегралов энергии, метод функкий Грина, метод интегральных уравнений.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-17-26

Поступила в редакцию: 09.04.2021 В окончательном варианте: 09.06.2021

Для цитирования. Зуннунов Р. Т. Нелокальная задача для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 35. № 2. С. 17-26. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-17-26

Введение

Известно, что впервые краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа поставлены и изучены в работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта. Большой интерес к уравнениям смешанного типа объясняется как теоретической значимостью результатов, так и наличием их практических приложений в газовой динамике, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, в безмоментной теории оболочек, в магнитной гидродинамике, в математической биологии и других областях. Например, газодинамические приложения краевых задач для уравнения Трикоми содержатся в работах Ф. И. Франкля. Нелокальные задачи для модельных уравнений смешанного типа исследовались А. М. Нахушевым и другими авторами, когда условия на характеристиках содержат дробные производные Римана–Лиувилля определенного порядка, зависящего от порядка вырождения уравнения.

Особенностью данной работы является наличие в краевых условиях не только классического оператора $D_{sx}^{a}[f(x)]$ но и оператора $A_{sx}^{1;\lambda}[f(x)]$ с помощью которых

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

нелокальные условия связывают значения искомого решения, принимаемые на полной границе характеристического треугольника.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$signy|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0 \tag{1}$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x,y) : y > 0, -\infty < x < +\infty\}$, а Ω_2 — область полуплоскости $y < 0$ ограниченная отрезком $\overline{AB} = \{(x,y) : y = 0, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и характеристиками

$$AC : x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 0, BC : x + [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1), выходящими из точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$. Здесь предполагается m,λ — заданные действительные числа, причем $\lambda = \lambda_1$ при $y > 0$, $\lambda = \lambda_2$ при $y < 0$, $m = const > 0$. Кроме того, $M_j (j = \overline{1,4})$ — положительные постоянные, а ε — достаточно малое положительное число, $\beta = m/(2m+4)$, $r_0 = \sqrt{x^2 + [2/(m+2)]^2 y^{m+2}}$

$$l_1 = \{(x,y) : -\infty < x < 0, y = 0\}, l_2 = \{(x,y) : 1 < x < +\infty, y = 0\}$$

$$\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\left[\frac{m+2}{2}, \frac{x}{2}\right]^{\frac{2}{m+2}}\right), \theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}, -\left[\frac{m+2}{2}, \frac{1-x}{2}\right]^{\frac{2}{m+2}}\right).$$

Очевидно, что $\theta_0(x)$ и $\theta_1(x)$ есть точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0) \in AB$, с характеристиками AC и BC соответственно.

Задача TN^∞. *Найти функцию $u(x,y)$ со следующим и свойствами:*

1) $u(x,y) \in C(\Omega \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ *причем $u_y(x,y)$ непрерывна вплоть до $l_1 \cup l_2$ и в окрестности точек $A(0,0)$ и $B(1,0)$, функции $y^m u_x(x,y), u_y(x,y)$, могут иметь особенности порядка меньше чем* $1-2\beta$;

2) *удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2* ;

3) *при достаточно больших r_0 удовлетворяет условиям*

$$|u(x,y)| < \frac{M_1}{r_0^\varepsilon}, |y^m u_x(x,y)| < \frac{M_2}{r_0}, |u_y(x,y)| < \frac{M_3}{r_0} \tag{2}$$

и краевым условиям

$$u_y(x,0) = \varphi_i(x), \forall x \in l_i, i = 1,2 \tag{3}$$

$$\begin{gathered} a(x) A_{0x}^{1,\lambda_2}\{D_{0x}^{1-\beta}[u(\theta_0(x))]\} + b(x) A_{1x}^{1,\lambda_2}\{D_{x1}^{1-\beta}[u(\theta_1(x))]\} + \\ + c(x) u_y(x,0) + g(x) u(x,0) = d(x), \forall x \in AB, \end{gathered} \tag{4}$$

где $\varphi_i(x), a(x), b(x), c(x), g(x), d(x)$ — заданные функции, причем $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) + g^2(x) \neq 0$, $a(x), b(x), c(x), g(x), d(x) \in C^1(\overline{AB})$, $\varphi_i(x) \in C(l_i)$ и при $x \longrightarrow 0$, $x \longrightarrow 1$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше чем $1-2\beta$, а для достаточно больших $|x|$ удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi_j(x)| \leq M_4 |x|^{-1-\delta}, \delta > 0,$$

а $D^{a}_{sx}[f(x)]$ — оператор дробного в смысле Римана-Лиувилля интегро-дифференцирования [1] и $A^{1,\lambda}_{sx}[f(x)]$ — оператор из [2].

Отметим, что условие (4) является нелокальным условием типа условия А. М. Нахушева. При $\lambda = 0, c(x) \equiv 0, g(x) \equiv 0, \forall x \in [0,1]$, из (4) следует условие, предложенное А. М. Нахушевым в [3], а из задачи TN^{∞} — задача, изученная З. Г. Денисовой в работе [4]. При $\lambda = 0$ аналогичная задача исследована в [5].

Единственность решения задачи TN^{∞}

.

Пусть $u(x,y)$ есть решение задачи TN^{∞}. Введем обозначения

$$u(x,0) = \tau(x), 0 \le x \le 1; u_y(x,0) = \nu(x), 0 < x < 1 \tag{5}$$

и предположим, что $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, $\nu(x) \in C^2(0,1)$, причем $\nu(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1-2\beta$ при $x \to 0$ и $x \to 1$. Тогда решение $u(x,y)$ в области Ω_2, как решение задачи Коши представимо в виде [6]:

$$u(x,y) = \gamma_1 \int\limits_0^1 \frac{\tau[x+\sigma(2t-1)]}{[t(1-t)]^{1-\beta}} \bar{I}_{\beta-1}\left[2\lambda\sigma\sqrt{t(1-t)}\right] dt +$$

$$+\gamma_2 y \int\limits_0^1 \frac{\nu[x+\sigma(2t-1)]}{[t(1-t)]^{\beta}} \bar{I}_{-\beta}\left[2\lambda\sigma\sqrt{t(1-t)}\right] dt, \tag{6}$$

где $\sigma = [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2}$, $\gamma_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$, $\bar{I}_{\alpha}(z)$ — функция Бесселя-Клиффорда а $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера [1].

Пользуясь представлением решения (6), с учетом свойств и известных соотношений для операторов дробного в смысле Римана-Лиувилля интегро-дифференцирования [1], а также свойств операторов $A^{1,\lambda}_{sx}[f(x)]$ и $C^{1,\lambda}_{sx}[f(x)]$ из [2] получим

$$A^{1,\lambda_2}_{0x}\left\{D^{1-\beta}_{0x}[u(\theta_0(x))]\right\} = \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(\beta)}\left\{\Gamma(2\beta)C^{1,\lambda_2}_{0x}[\tau(x)] - \frac{\pi\gamma_3\nu(x)}{\sin(2\beta\pi)}\right\}, \tag{7}$$

$$A^{1,\lambda_2}_{1x}\left\{D^{1-\beta}_{x1}[u(\theta_1(x))]\right\} = \frac{(1-x)^{-\beta}}{\Gamma(\beta)}\left\{\Gamma(2\beta)C^{1,\lambda_2}_{1x}[\tau(x)] - \frac{\pi\gamma_3\nu(x)}{\sin(2\beta\pi)}\right\}, \tag{8}$$

где $\gamma_3 = (2-4\beta)^{2\beta}\Gamma(\beta)/[2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)]$.

Подставляя (7) и (8) в условие (4), получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB из области Ω_2:

$$q(x)\nu(x) = \gamma_4\Gamma(\beta)[x(1-x)]^{\beta} g(x)\tau(x) - \gamma_4\Gamma(\beta)[x(1-x)]^{\beta} d(x) +$$

$$+\gamma_4\Gamma(2\beta)a(x)(1-x)^{\beta}C^{1,\lambda_2}_{0x}[\tau(x)] + \gamma_4\Gamma(2\beta)b(x)x^{\beta}C^{1,\lambda_2}_{1x}[\tau(x)],\ 0<x<1, \tag{9}$$

где $q(x) = (1-x)^{\beta}a(x) + x^{\beta}b(x) - \gamma_4\Gamma(\beta)[x(1-x)]^{\beta}c(x)$, $\gamma_4 = \sin 2\beta/\pi\gamma_3$.

Теорема. Пусть функции $a(x)$,$b(x)$,$c(x)$,$g(x)$ удовлетворяют условиям

$$a(x) = x^{\beta+\varepsilon}a_0(x), b(x) = (1-x)^{\beta+\varepsilon}b_0(x), c(x) = [x(1-x)]^{\varepsilon}c_0(x); \tag{10}$$

$$a_0(x), b_0(x), c_0(x) \in C^1[0,1];$$

$$q_0(x) = x^{\varepsilon}a_0(x) + (1-x)^{\varepsilon}b_0(x) - \gamma_4\Gamma(\beta)[x(1-x)]^{\varepsilon}c_0(x) \neq 0,\ 0 \le x \le 1; \tag{11}$$

$$g(x) \ge 0,\ [x^{\varepsilon}a_0(x)/q_0(x)]' \le 0,\ [(‘1-x)^{\varepsilon}b_0(x)/q_0(x)]' \ge 0,\ 0 \le x \le 1. \tag{12}$$

Тогда задача TN^{∞} не может иметь более одного решения.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. Если $u(x,y)$ — решение однородной задачи TN^{∞} и выполнены условия теоремы, то справедливо неравенство

$$\Delta = \int\limits_0^1 \tau(x)\nu(x)dx \ge 0.$$

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи TN^{∞}. Тогда, согласно (9) справедливо равенство

$$q(x)\nu(x) = \gamma_4\Gamma(2\beta)a(x)(1-x)^{\beta}C_{0x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)] + \gamma_4\Gamma(2\beta)b(x)x^{\beta}C_{1x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)] +$$

$$+\gamma_4\Gamma(\beta)[x(1-x)]^{\beta}g(x)\tau(x), 0 < x < 1.$$

Учитывая (10), отсюда имеем

$$q_0(x)\nu(x) = \gamma_4\Gamma(2\beta)x^{\varepsilon}a_0(x)C_{0x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)] + \gamma_4\Gamma(2\beta)(1-x)^{\varepsilon}b_0(x)C_{1x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)] +$$

$$+\gamma_4\Gamma(\beta)g(x)\tau(x), 0 < x < 1. \tag{13}$$

Принимая во внимание $q_0(x) \neq 0$, из (13) находим функцию $\nu(x)$ и подставим в Δ:

$$\Delta = \gamma_4\Gamma(2\beta)\int\limits_0^1 \tau(x)\left\{a_1(x)C_{0x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)] + b_1(x)C_{1x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)]\right\}dx +$$

$$+\gamma_4\Gamma(\beta)\int\limits_0^1 g_1(x)\tau^2(x)dx \tag{14}$$

где $a_1(x) = x^{\varepsilon}a_0(x)/q_0(x)$, $b_1(x) = (1-x)^{\varepsilon}b_0(x)/q_0(x)$, $g_1(x) = g(x)/q_0(x)$.

Введя обозначения

$$\rho_1(x) = \gamma_4\Gamma(2\beta)C_{0x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)], \rho_2(x) = \gamma_4\Gamma(2\beta)C_{1x}^{1,\lambda_2}[\tau(x)] \tag{15}$$

и обращая равенства (15) относительно $\tau(x)$ в классе функций, непрерывных на $[0,1]$, как и в [2], подставляя в (14), получим

$$\Delta=\gamma_3\left\{\int\limits_0^1 a_1(x)\rho_1(x)dx\int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta}\rho_1(t)\bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(x-t)]\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1 b_1(x)\rho_2(x)dx\int\limits_x^1 (t-x)^{-2\beta}\rho_2(t)\bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(t-x)]\,dt\right\}+\gamma_4\Gamma(\beta)\int\limits_0^1 g_1(x)\,\tau^2(x)\,dx.$$

Отсюда, пользуясь формулами

$$|x-t|^{-2\beta}=\frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos(\pi\beta)}\int\limits_0^\infty z^{2\beta-1}\cos[z\,(x-t)]dz,$$

$$J_\alpha(z)=\frac{(z/2)^\alpha}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}\int\limits_{-1}^1 (1-\xi^2)^{\alpha-(1/2)}\cos(\xi z)\,d\xi,\quad Re\alpha>-1/2$$

находим

$$\Delta=\gamma_5\int\limits_0^{+\infty} z^{2\beta-1}dz\int\limits_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}d\xi\left\{\int\limits_0^1 a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^2\left[\left(\int\limits_0^x \rho_1(t)\cos(z_kt)dt\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_0^x \rho_1(t)\sin(z_kt)dt\right)^2\right]dx-\int\limits_0^1 b_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^2\left[\left(\int\limits_x^1 \rho_2(t)\cos(z_kt)dt\right)^2+\right.$$

$$\left.\left.+\left(\int\limits_x^1 \rho_2(t)\cos(z_kt)dt\right)^2\right]dx\right\}+\gamma_4\Gamma(\beta)\int\limits_0^1 g_1(x)\,\tau^2(x)\,dx,$$

где $z_k=z-(-1)^k\lambda_2\xi$, $\gamma_5=\left[(2-4\beta)^{2\beta}\Gamma(\beta)\right]/\left[8\sqrt{\pi}\Gamma(\beta-1/2)\Gamma^2(2\beta)\cos(\pi\beta)\right]$.

Интегрируя по частям интегралы по x, имеем

$$\Delta=\gamma_5\int\limits_0^{+\infty} z^{2\beta-1}dz\int\limits_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-1/2}d\xi\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^2\left[\left(\int\limits_0^1 \rho_1(t)\cos(z_kt)dt\right)^2+\left(\int\limits_0^1 \rho_1(t)\sin(z_kt)dt\right)^2\right]-\right.$$

$$-\int\limits_0^1 a_1'(x)\sum_{k=1}^2\left[\left(\int\limits_0^x \rho_1(t)\cos(z_kt)dt\right)^2+\left(\int\limits_0^x \rho_1(t)\sin(z_kt)dt\right)^2\right]dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\left[\left(\int_{0}^{1}\rho_2(t)\cos(z_k t)dt\right)^2+\left(\int_{0}^{1}\rho_2(t)\sin(z_k t)dt\right)^2\right]+$$

$$\left.+\int_{0}^{1}b_1'(x)\sum_{k=1}^{2}\left[\left(\int_{x}^{1}\rho_2(t)\cos(z_k t)dt\right)^2+\left(\int_{x}^{1}\rho_2(t)\sin(z_k t)dt\right)^2\right]dx\right\}+$$

$$+\gamma_4\Gamma(\beta)\int_{0}^{1}g_1(x)\tau^2(x)dx$$

Отсюда, в силу условий (11),(12) и $\gamma_5>0$, $\gamma_4\Gamma(\beta)>0$ следует, что $\Delta\geq 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи TN^{∞}. Тогда в области Ω_1 справедливо тождество

$$(y^m u u_x)_x+(u u_y)_y-y^m(u_x)^2-(u_y)^2-y^m\lambda_1^2u^2=0 \tag{16}$$

а на AB имеет место равенство (13). Тогда единственность решения задачи TN^{∞} будет сразу следовать из соотношений

$$\iint_{\Omega_1}\left[y^m(u_x)^2+(u_y)^2+\lambda_1^2y^mu^2\right]dxdy+\int_{0}^{1}\tau(x)\nu(x)dx=0,\Delta\geq 0. \tag{17}$$

В силу утверждения леммы и $u(x,y)\in C(\Omega_1\cup l)$, из (17) при $\lambda_1\neq 0$ сразу следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\Omega_1\cup l$. Если $\lambda_1=0$, то из (17) с учетом $u(x,y)\in C(\Omega_1\cup l)$ получим $u(x,y)\equiv const$ в $\Omega_1\cup l$. Учитывая первое из условий (2), и $u_y(x,0)=0(\forall x\in l_i, i=1,2)$ в этом случае тоже имеем $u(x,y)\equiv 0$ в $\Omega_1\cup l$. Отсюда следует, что $u(x,0)=0$ и $u_y(x,0)=0$ на AB. Принимая во внимание это и (5), согласно формуле (6), получим $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}_2$. Следовательно, $u(x,y)\equiv 0$, $(x,y)\in\Omega\cup l_1\cup l_2\cup\overline{AC}\cup\overline{BC}$. Тем самым теорема доказана.

Существование решения задачи TN^{∞}

Переходим к доказательству существования решения задачи TN^{∞}. Пусть выполнены условия теоремы, а $u(x,y)$ — решение задачи TN^{∞}. Тогда решение задачи TN^{∞} в области Ω_1, как решение задачи Неймана полученное методом функций Грина, представимо в виде

$$u(x,y)=-k_1\int_{-\infty}^{+\infty}\nu_0(t)r^{-2\beta}\bar{K}_\beta(|\lambda_1|r)dt \tag{18}$$

где $k_1=[4/(m+2)]^{2\beta}\Gamma^2(\beta)/[4\pi\Gamma(2\beta)]$, $r^2=(x-t)^2+[2/(m+2)]^2y^{m+2}$, $\bar{K}_\beta(z)=2^{1-\beta}z^\beta K_\beta(z)/\Gamma(\beta)$ — функция Бесселя-Клиффорда,

$$\nu_0(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & -\infty<x<0;\\ \nu(x), & 0<x<1;\\ \varphi_2(x), & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Полагая в (18) $y=0$, получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на AB, принесенное из области Ω_1:

$$\tau(x)=-k_1\int\limits_0^1 \nu(t)|x-t|^{-2\beta}\bar{K}_\beta[|\lambda_1|(x-t)]dt+f(x), \tag{19}$$

где $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,

$$f_1(x)=-k_1\int\limits_{-\infty}^0 \varphi_1(t)|x-t|^{-2\beta}\bar{K}_\beta[|\lambda_1|\,|x-t|]dt,$$

$$f_2(x)=-k_1\int\limits_1^{+\infty} \varphi_2(t)|x-t|^{-2\beta}\bar{K}_\beta[|\lambda_1|\,|x-t|]dt.$$

С другой стороны на AB справедливо равенство (9). Пользуясь разложением оператора C_{sx}^{1,λ_2} [2] и условиями (10), равенство (9) можно переписать в виде

$$q_0(x)\nu(x)=\gamma_4\Gamma(\beta)\,g(x)\,\tau(x)-\gamma_4\Gamma(\beta)d(x)+\gamma_4\Gamma(2\beta)\,x^\varepsilon a_0(x)\,D_{0x}^{1-2\beta}[\tau(x)]+$$

$$+\gamma_4\Gamma(2\beta)\,(1-x)^\varepsilon\,b_0(x)D_{x1}^{1-2\beta}[\tau(x)]+\int\limits_0^1 Q(x,t)\,\tau(t)\,dt, \tag{20}$$

где

$$Q(x,t)=\begin{cases} Q_1(x,t)=\gamma_4 x^\varepsilon a_0(x)\left\{\frac{d}{dx}\left[\frac{\bar{J}_\beta[\lambda_2(x-t)]-1}{(x-t)^{1-2\beta}}\right]+\right.\\ \left.+\frac{\lambda_2^2(x-t)^{2\beta}}{4\beta(1+\beta)}\bar{J}_{\beta+1}[\lambda_2(x-t)]\right\},\ x\ge t;\\ Q_2(x,t)=\gamma_4\,(1-x)^\varepsilon\,b_0(x)\left\{-\frac{d}{dx}\left[\frac{\bar{J}_\beta[\lambda_2(t-x)]-1}{(t-x)^{1-2\beta}}\right]+\right.\\ \left.+\frac{\lambda_2^2(t-x)^{2\beta}}{4\beta(1+\beta)}\bar{J}_{\beta+1}[\lambda_2(t-x)]\right\},\ x\le t. \end{cases}$$

Таким образом, задача TN^∞ (в смысле разрешимости и в классе искомых решений) эквивалентна системе уравнений (19) и (20). Если из этой системы однозначно найдем функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ с требуемыми свойствами, тогда решение задачи TN^∞ в областях Ω_1 и Ω_2 определяется формулами (6) и (18) соответственно. Поэтому теперь займемся нахождением функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$ из системы (19) и (20).

Пусть выполнены условия теоремы и дополнительно будем предпологать что $a_0(1)*b_0(0)\neq 0$, $a_0(x)$, $b_0(x)$, $c_0(x)\in C^2[0,1]$, $d(x)\in C[0,1]\cup C^2(0,1)$, $f(0)=f(1)=0$.

Исключая функцию $\tau(x)$ из равенств (19) и (20), имеем

$$A(x)\nu(x)+\frac{B(x)}{\pi}\int\limits_0^1\frac{\nu(t)}{t-x}dt+\int\limits_0^1 P(x,t)\nu(t)dt=F(x),0<x<1, \tag{21}$$

где

$$A(x)=q_0(x)+\left[x^\varepsilon a_0(x)+(1-x)^\varepsilon\,b_0(x)\right]\sin(\pi\beta)$$

$$B(x)=\left[x^{\varepsilon}a_0(x)-(1-x)^{\varepsilon}b_0(x)\right]\cos(\pi\beta)$$

$$P(x,t)=P_0(x,t)+P_1(x,t)+P_2(x,t),$$

$$P_0(x,t)=k_1\int\limits_0^1\left[Q(x,z)+\gamma_4\Gamma(\beta)g(z)\right]|z-t|^{-2\beta}\bar{K}_\beta\left[|\lambda_1||z-t|\right]dz$$

$$P_1(x,t)=\frac{1}{\pi}x^{\varepsilon}a_0(x)\cos(\pi\beta)\left[G_1(x,t)-G_1(x,x)\right](t-x)^{-1},$$

$$P_2(x,t)=\frac{1}{\pi}(1-x)^{\varepsilon}b_0(x)\cos(\pi\beta)\left[G_2(x,t)-G_2(x,x)\right](t-x)^{-1}.$$

$$G_1(x,t)=\left(\frac{t}{x}\right)^{1-2\beta}\bar{K}_\beta(|\lambda_1|t)+\frac{2^{1-2\beta}|\lambda_1|\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\beta)}\int\limits_0^x\frac{\bar{K}_{1-\beta}\left[|\lambda_1|\,|t-z|\right]}{(x-z)^{1-2\beta}}dz$$

$$G_2(x,t)=-\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{1-2\beta}\bar{K}_\beta\left[|\lambda_1|(1-t)\right]-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(\beta)}2^{1-2\beta}|\lambda_1|^{2\beta}\Gamma(1-\beta)\int\limits_x^1\frac{\bar{K}_{1-\beta}\left[|\lambda_1|(z-t)\right]}{(z-x)^{1-2\beta}}dz$$

$$F(x)=\gamma_4\Gamma(\beta)g(x)-\gamma_4\Gamma(\beta)d(x)+\gamma_4\Gamma(2\beta)x^{\varepsilon}a_0(x)D_{0x}^{1-2\beta}\left[f(x)\right]+$$

$$+\gamma_4\Gamma(2\beta)(1-x)^{\varepsilon}b_0(x)D_{x1}^{1-2\beta}\left[f(x)\right]+\int\limits_0^1 Q(x,t)f(t)\,dt$$

Используя условия, наложенные на заданные функции, нетрудно убедиться, что $F(x)\in C^2(0,1)$ и может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to 0$ и $x\to 1$, а ядро $P(x,t)$ имеет слабую особенность.

Переходя к вопросу о разрешимости сингулярного интегрального уравнения (21), прежде всего, заметим, что оно является уравнением нормального типа [7], так как $A^2(x)+B^2(x)\neq 0,\ \forall x\in[0,1]$. Следовательно, существует регуляризатор приводящий уравнение (21) к уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которого, в силу эквивалентности, следует из единственности решения задачи TN^{∞}. По найденной функции $\nu(x)$ из искомого класса функций можно определить $\tau(x)$ из (19), тогда решение задачи TN^{∞} в областях Ω_1 и Ω_2 определяется формулами (6) и (18) соответственно.

Список литературы/References

[1] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya*, Nauka i tekhnika, Minsk, 1987, 688 pp.]

[2] Салахитдинов М. С., Уринов А. К., *Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром*, Наука, Ташкент, 1997, 165 с. [Salakhitdinov M. S., Urinov A. K., *Krayevyye zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom*, Nauka, Tashkent, 1997, 165 pp.]

[3] Нахушев А. М., "О некоторых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа", *Дифференциальные уравнения*, **5**:1 (1969), 44-59. [Nakhushev A. M., "O nekotorykh zadachakh dlya giperbolicheskikh uravneniy i uravneniy smeshannogo tipa", *Differentsial'nyye uravneniya*, **5**:1 (1969), 44-59].

[4] Денисова З. Г., "Об одной краевой задаче со смещением для уравнения в неограниченной области", *Дифференциальные уравнения*, **14**:1 (1978), 170-173. [Denisova Z. G., "Ob odnoy krayevoy zadache so smeshcheniyem dlya uravneniya v neogranichennoy oblasti", *Differentsial'nyye uravneniya*, **14**:1 (1978), 170-173].

[5] Репин О. А, Кумыкова С. К., "Об одной краевой задаче со смещением для уравнения смешанного типа в неограниченной области", *Дифференциальные уравнения*, **48**:8 (2012), 1140-1149. [Repin O. A, Kumykova S. K., "Ob odnoy krayevoy zadache so smeshcheniyem dlya uravneniya smeshannogo tipa v neogranichennoy oblasti", *Differentsial'nyye uravneniya*, **48**:8 (2012), 1140-1149].

[6] Бакиевич Н. И., "Сингулярные задачи Трикоми для уравнения $y^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 y^m u = 0$", *Известия высших учебных заведений*, 1964, №2(39), 7-13. [Bakiyevich N. I., "Singulyarnyye zadachi Trikomi dlya uravneniya $y^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 y^m u = 0$", *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy*, 1964, №2(39), 7-13].

[7] Мусхелишвили Н. И., *Сингулярные интегральные уравнения*, ГИФМЛ, М., 1962, 600 с. [Muskhelishvili N. I., *Singulyarnyye integral'nyye uravneniya*, GIFML, M., 1962, 600 pp.]

MSC 35M10, 35M12 Research Article

A nonlocal problem for a generalized Trikomi equation with a spectral parameter in the unbounded domain

R. T. Zunnunov

Institute of Mathematics Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, University st., 4b, Uzbekistan

E-mail: zunnunov@mail.ru

In this article, we study a nonlocal problem for the generalized Tricomi equation with a spectral parameter in an unbounded domain, the elliptic part of which is the upper half-plane. The uniqueness of the solution to the problem posed is proved by the method of energy integrals. The existence of a solution to the problem is proved by the method of Green's functions and integral equations.

Key words: non-local problem, unbounded domain, generalized Tricomi equation with spectral parameter, energy integrals method, Green's function method, integral equations method.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-17-26

Original article submitted: 09.04.2021 Revision submitted: 09.06.2021

For citation. Zunnunov R. T. A nonlocal problem for a generalized Trikomi equation with a spectral parameter in the unbounded domain. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **35**: 2, 17-26. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-17-26

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.