УДК 512.24

Научная статья

Исследование математической модели длительного вооруженного конфликта с учетом эредитарности

И. С. Кокорев

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: kokorevigor93@gmail.com

Рассматривается обобщённая модель длительного вооруженного конфликта в условиях эредитарности. Ставится задача по обобщению классической модели Ланчестера и записывается в разностной подстановке через аппроксимацию дробной производной. Приводятся графики переходных процессов и фазовых траекторий, которые были построены с помощью численного решения в зависимости от различных значений управляющих параметров.

Ключевые слова: математическая модель длительного вооруженного конфликта, эредитарность, фазовая траектория.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-48-55

Поступила в редакцию: 20.05.2021

В окончательном варианте: 10.06.2021

Для цитирования. Кокорев И. С. Исследование математической модели длительного вооруженного конфликта с учетом эредитарности // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 35. № 2. С. 48-55. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-48-55

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Кокорев И. С., 2021

Введение

В наше время военные конфликты по-прежнему являются неотъемлемой частью во взаимоотношениях между государствами. И хотя эпоха глобальных мировых войн давно прошла благодаря изобретению стратегического ядерного оружия, различные менее масштабные локальные военные конфликты до сих пор продолжают существовать. Такое событие, как военный конфликт всегда оказывает огромное влияние на жизнь участвующих в нём стран. От того, как разрешится конфликт будет зависеть военное превосходство, экономическое состояние, а так же характер социальной напряжённости на территориях конфликта и всей страны в целом.

В современную эпоху войны происходят между странами, несоизмеримыми по военной мощи. Поэтому войсковая операция заканчивается достаточно быстро победой сильнейшей из сторон. Но вслед за этим может начаться война сопротивления, которая иногда длится довольно долго. В этом случае процесс

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

военных действий между оккупационной группой войск и силами сопротивления принимает стационарный характер с установившимися статистически средними потерями в течение определенного времени (например, календарный год). Может оказаться, что одна из сторон или обе, вводят в действие дополнительные силы. В этом случае каждая из сторон должна проанализировать последствия таких шагов, определяя возможные потери как противника, так и собственные потери [1]. Кроме того, представляет интерес динамика изменения численности сил сторон во времени, которая зависит от быстроты замещения потерь и ввода новых резервов [2].

В данной статье мы исследуем одну из таких математических моделей длительного вооружённого (модель Ланчестера) конфликта, основанной на интенсивности замещения потерь и вводе новых резервов.

Постановка задачи и методика решения

Для описания динамической модели двустороннего X и Y вооружённого конфликта, основываясь на математическом принципе эрeditarности [3], воспользуемся системой линейных дифференциальных уравнений с производными дробных порядков:

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = bx(t) + K_x(x_T - x(t)), \\ \frac{d^\beta y(t)}{dt^\beta} = -ay(t) + K_y(y_T - y(t)), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(t), y(t)$ — численность противоборствующих сторон X и Y в момент времени t , $t \in [0, T]$ — время процесса, T — время моделирования, x_T, y_T — заданные желаемые значения численности сторон X и Y , K_x, K_y — коэффициенты усиления, определяющие скорость ввода-вывода войск соответствующих сторон конфликта, a, b — удельные потери сторон X и Y , x_0, y_0 — численность противоборствующих сторон в начальный момент времени, операторы дробного дифференцированного порядков $0 < \alpha, \beta < 1$ в смысле Герсимова-Капуто:

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau (t-\tau)^{\alpha-1}, \quad \frac{d^\beta y}{dt^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \dot{y}(\tau) d\tau (t-\tau)^{\beta-1}.$$

Необходимо отметить, что математическая модель (1) является обобщением классической модели Ланчестера [1] и совпадает с ней при $\alpha = \beta = 1$.

Наличие операторов дробных производных в (1) указывает на то, что исследуемый процесс обладает эффектами памяти. Эффекты памяти в динамической системе означают, что текущее состояние системы зависит от предыдущих т.е. от предыстории. В рамках вооруженного конфликта наличие эффектов памяти будем трактовать необходимостью ввода-вывода войск противоборствующих сторон постепенно по мере необходимости.

Необходимо отметить, что также важной характеристикой рассматриваемого процесса является ожидание потерь сторон X и Y за некоторый промежуток времени:

$$S_x = \int_0^t bx(t) dt, S_y = \int_0^t ay(t) dt.$$

Методика решения

Будем искать решение задачи (1) с помощью численных методов, теории конечно-разностных схем. Введем равномерную расчетную сетку. Для этого разобьем интервал $[0, T]$ на N равных частей с шагом $\tau = T/N$. Тогда функции $x(t)$ и $y(t)$ перейдут в сеточные функции x_k и y_k , где $k = 1, \dots, N-1$. Аппроксимации производных дробных порядков в уравнении (1) имеют следующий вид:

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} \approx \frac{\tau^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^{k-1} w_i (x_{k-i+1} - x_{k-i}), w_i = (i+1)^{1-\alpha} - i^{1-\alpha},$$

$$\frac{d^\beta y}{dt^\beta} \approx \frac{\tau^\beta}{\Gamma(2-\beta)} \sum_{i=0}^{k-1} v_i (y_{k-i+1} - y_{k-i}), v_i = (i+1)^{1-\beta} - i^{1-\beta}.$$

Тогда задачу (1) можно переписать в дискретной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{-by_0 + K_x(x_T - x_0) + Ax_0}{A}, \\ y_1 = \frac{-ax_0 + K_y(y_T - y_0) + By_0}{B}, \\ x_{k+1} = \frac{-by_k + K_x(x_T - x_k) - A \sum_{i=1}^{k-1} w_i (x_{k-i+1} - x_{k-i}) + Ax_k}{A}, \\ y_{k+1} = \frac{-ax_k + K_y(y_T - y_k) - B \sum_{i=1}^{k-1} v_i (y_{k-i+1} - y_{k-i}) + By_k}{B}, \\ k = 1, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (2)$$

С помощью схемы (2) далее были получены и исследованы графики переходного процесса изменения численности и графики фазовой траектории для группировок войск X и Y .

Решение задачи (1) было реализовано в системе компьютерной математики Maple 2021 и проведена ее визуализация.

Результаты моделирования и их обсуждения

Рассмотрим стратегию при которой значения управляющих параметров будут: $a = 0.005, b = 0.002, x_T = 134.5, y_T = 50, K_x = 0.5, K_y = 1, x_0 = 134.5, y_0 = 50$, для расчетной явной конечно-разностной схемы (3) выберем $N = 120, T = 12$. Построим график переходного процесса сил сосредоточения нападающей стороны X , при различных значениях: $\alpha = 1, \beta = 1$; $\alpha = 0.8, \beta = 0.9$; $\alpha = 0.6, \beta = 0.8$; $\alpha = 0.4, \beta = 0.7$ и заданных значениях управляющих параметров. Результаты моделирования приведены на рис. 1.

Рис. 1. График переходного процесса численности нападающей группировки X

Как видно из графика (рис. 1), наиболее выгодная интенсивность ведения боя и ввода резервов нападающей группировки X при $\alpha = 0.4$ и $\beta = 0.7$ (синяя линия на графике) это обусловлено наименьшими значениями потери численности войск.

Построим график переходного процесса сил сосредоточения обороняющейся стороны Y при различных значениях $\alpha = 1, \beta = 1$; $\alpha = 0.8, \beta = 0.9$; $\alpha = 0.6, \beta = 0.8$; $\alpha = 0.4, \beta = 0.7$ и заданных значениях управляющих параметров модели. Результаты моделирования приведены на рис. 2.

Рис. 2. График переходного процесса численности нападающей группировки Y

Как видно из графика (рис.2), наиболее выгодная интенсивность ведения боя и ввода резервов обороняющейся группировки Y при $\alpha = 0.4, \beta = 0.7$ (синяя линия на графике) это обусловлено наименьшими значениями потери численности войск.

Согласно рис. 1 и 2 мы можем сделать выводом о том, что при выборе значений параметров $\alpha = 0.4, \beta = 0.7$ мы получаем ситуацию затяжного вооруженного конфликта.

Построим график переходного процесса математического ожидания S_x потерь наносимых стороне X , при различных значениях $\alpha = 1, \beta = 1$; $\alpha = 0.8, \beta = 0.9$, $\alpha = 0.6, \beta = 0.8$, $\alpha = 0.4, \beta = 0.7$ и заданных значениях управляющих параметров. Результаты моделирования приведены на рис. 3.

Рис. 3. График переходного процесса математического ожидания потерь наносимых группировке X

Как видно из графика (рис. 3), линии практически совпадают, столь незначительные изменения математического ожидания потерь обусловлены тем, что заданный коэффициент $y_T = y_0$.

Построим график переходного процесса математического ожидания потерь S_y наносимых стороне Y , при различных значениях $\alpha = 1, \beta = 1$; $\alpha = 0.8, \beta = 0.9$, $\alpha = 0.6, \beta = 0.8$, $\alpha = 0.4, \beta = 0.7$ и заданных значениях управляющих параметров. Результаты моделирования приведены на рис. 4.

Как видно из графика (рис. 4), линии практически совпадают, незначительные изменения математического ожидания потерь обусловлены тем, что заданный коэффициент $x_T = x_0$.

Построим график переходного процесса фазовой траектории численности сторон X и Y при различных значениях $\alpha = 1, \beta = 1$; $\alpha = 0.8, \beta = 0.9$, $\alpha = 0.6, \beta = 0.8$, $\alpha = 0.4, \beta = 0.7$ и заданных значениях управляющих параметров. Результаты моделирования приведены на рис. 5.

Как видно из графика (рис. 5), наиболее выгодная интенсивность ведения боя и ввода резервов нападающей группировки X при $\alpha = 0.4$ и $\beta = 0.7$ (синяя линия на графике) это обусловлено более скорым восстановлением численности войск.

Рис. 4. График переходного процесса математического ожидания потерь наносимых группировке Y

Рис. 5. График фазовой траектории изменения численности группировок войск X и Y

На рис. 1-5 наглядно показаны как изменится соотношение сил обеих сторон конфликта при изменениях значений коэффициентов $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$, что свидетельствует об эффективности изменения параметров интенсивности ввода-

вывода войск и ведения боя и на основании этого более точного выбора тактико-стратегического планирования.

Заключение

В работе была рассмотрена обобщённая математическая модель противоборства сторон. Были найдены численные решения, построены графики переходных процессов и графики фазовых траекторий. Анализ результатов показал, что при изменении параметров α и β , изменяется интенсивность ввода-вывода войск, как следствие изменяется численность и математическое ожидание потерь сторон.

Разработана компьютерная программа, реализующая этот алгоритм. С помощью программы Maple построены графики соотношений численности войск по времени и фазовые траектории соотношения численности сторон конфликта зависимости от различных значений управляющих параметров.

Интерес представляет рассмотрение развитие предложенной модели с учетом непостоянных коэффициентов $a(t)$ и $b(t)$, также $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. В последнем случае можно провести численный анализ по аналогии с работой [4].

Благодарность. Автор выражает благодарность проф. Паровику Р.И. за ценные замечания, которые послужили лучшему осмыслению результатов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

- [1] Митюков Н. В., *Имитационное моделирование в военной истории*, ЛКИ, 2011, 280 с. [Mityukov N. V., *Imitatsionnoye modelirovaniye v voyennoy istorii*, LKI, 2011, 280 pp.]
- [2] Буянов Б. Б., Лубков Н. В., Поляк Г. Л., “Математическая модель длительного вооруженного конфликта”, *Проблемы управления*, **5** (2007), 48-51. [Buyanov B. B., Lubkov N. V., Polyak G. L., “Matematicheskaya model’ dlitel’nogo vooruzhennogo konflikta”, *Problemy upravleniya*, **5** (2007), 48-51].
- [3] Учайкин В. В., *Метод дробных производных*, Артишок, Ульяновск, 2008, 512 с. [Uchaykin V. V., *Metod drobnyykh proizvodnykh*, Artishok, Ul’yanovsk, 2008, 512 pp.]
- [4] Паровик Р. И., “О численном решении уравнения фрактального осциллятора с производной дробного переменного порядка от времени”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014, № 1(8), 60-65. [Parovik R. I., “O chislennom reshenii uravneniya fraktal’nogo ostillyatora s proizvodnoy drobnogo peremennogo poryadka ot vremeni”, *Vestnik KRAUNTS. Fiziko-matematicheskiye nauki*, 2014, № 1(8), 60-65].

MSC 37N35

Research Article

Research of the mathematical model of long-lasting armed conflict taking into account hereditarity

I. S. Kokorev

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: kokorevigor93@gmail.com

A generalized model of a long-term armed conflict in conditions of heredity is considered. The problem is posed to generalize the classical Lanchester model and is written in the difference substitution through the approximation of the fractional derivative. The graphs of transient processes and phase trajectories are given, which were constructed using a numerical solution depending on various values of the control parameters.

Key words: mathematical model of a long-term armed conflict, heredity, phase trajectory.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-48-55

Original article submitted: 20.05.2021

Revision submitted: 10.06.2021

For citation. Kokorev I. S. Research of the mathematical model of long-lasting armed conflict taking into account hereditarity. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **35**: 2, 48-55. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-48-55

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Kokorev I. S., 2021

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.