УДК 511

Научная статья

О применении компьютерной техники при изучении дисциплины "Теория чисел"

А. П. Горюшкин

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная , 4
E-mail: as2021@mail. ru

Обсуждаются проблемы, связанные с компьютерными проверками теоретико-числовых гипотез. Предлагаются новые машинные способы нахождения простых чисел близнецов, совершенных и дружественных чисел, разложения Гольдбаха и проверки гипотезы Кармайкла.

Ключевые слова: простое число, функция Эйлера, простые числа-близнецы, алгоритм, совершенное число, дружественные числа.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-63-70

Поступила в редакцию: 09.02.2021 В окончательном варианте: 09.03.2021

Для цитирования. Горюшкин А. П. О применении компьютерной техники при изучении дисциплины "Теория чисел" // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2021. Т. 35. № 2. С. 63-70. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-63-70

Введение

Компьютер в настоящее время является незаменимым помощником для проведения эвристических экспериментов в поисках опровержения гипотезы в теории чисел. Здесь в продолжение работ [1]-[3] будут рассмотрены теоретико-числовые проблемы, пока не имеющие окончательного решения (гипотеза Гольдбаха, гипотеза Кармайкла, гипотеза о простых числах-близнецах, гипотеза о совершенных и дружественных числах) и проведены соответствующие компьютерные эксперименты.

Гипотеза Гольдбаха

Еще в 1742 г. петербургский академик Христиан Гольдбах высказал предположение, что каждое четное число больше двух можно представить в виде суммы двух простых чисел. Доказательства этого утверждения пока не получено, т.е. проблема Гольдбаха еще не решена.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

Возьмем четное число $a>2$ и с помощью команд *Maple* подсчитаем число способов представления числа a в виде суммы двух простых чисел.

$>$ *with*(*numtheory*):
$>$ a := ___ : k := 0:
for i from 2 *to a by* 1
do if isprime(i) *and isprime*($a - i$)
then $k := k + 1$:
else fi od; *print*(k);

Можно заметить, что число таких представлений для конкретного n не просто ненулевое, а заметно быстро увеличивается с возрастанием n.

Таблица

Число представлений n

Число n	Число способов представления n в виде суммы двух простых чисел
10	3
100	12
1 000	56
10 000	254
100 000	1 620
1 000 000	10804

Несмотря на заметное увеличение таких представлений с увеличением n, пока нет доказательства, что для любого четного *n найдется хотя бы одно такое представление* (как нет *контрпримера*, опровергающего предположение Гольдбаха). Вычислительная техника позволяет найти такое представление для сравнительно больших чисел. В программу внесем команды *print*(i) и *break* после найденного первого представления Гольдбаха.

$>$ *with*(*numtheory*):
$>$ a := ___ :
for i from 2 *to a by* 1
do if isprime(i) *and isprime*($a - i$)
then print(i):
break end do

Для примера остановим работу программы, как только она найдет представление числа $a = 10^{600}$ в виде суммы двух простых чисел и выдаст меньшее слагаемое. Получим представление

$$10^{600} = 4091 + (10^{600} - 4091).$$

Проверим на всякий случай с помощью команд *Maple* так ли это.

$>$ *with*(*numtheory*):
$>$ *isprime* (4091)

true

$>$ *isprime* (10^600 – 4091):

true

Гипотеза Кармайкла

В 1907 г. американский математик Роберт Кармайкл заметил для сравнительно больших числовых интервалов, что функция Эйлера $\phi(n)$ при $n > 1$ принимает каждое свое значение *не менее двух раз*. Пока не доказано и не опровергнуто, что так будет всегда.

Машинные команды позволяют вычислить функцию Эйлера, а также в некотором смысле взять обратную (многозначную) функцию $\phi^{-1}(n)$:
$> phi(9876);$

$$3288$$

$> invphi(3288);$

$$[4115, 6584, 8230, 9876]$$

С помощью «обращения» функции Эйлера можно обнаружить, как изменяется число совпадений значений $\phi(n)$, всегда оставаясь не меньше двух. В следующем примере $a = 10$, $b = 20$:
$>$ *for i from a to b*
do if $invphi(i) <> []$ *then*
$print(invphi(i))$
else fi od;

$$[11, 22]$$

$$[13, 21, 26, 28, 36, 42]$$

$$[17, 32, 34, 40, 48, 60]$$

$$[19, 27, 38, 54]$$

$$[25, 33, 44, 50, 66]$$

Можно расширить возможности поиска совпадений функции Эйлера в различных точках. Придав конкретные значения a, b в программе:
$>$ a:= ___: b:= ___: k:= 0:
for i from 2 *to a*
do if $phi(i)=b$
then $k := k + 1$
else fi od ; : $print(k)$:
можно вычислить число решений уравнения $\phi(x) = b$ для x из интервала $[1, a]$. По результатам вычислений видно, что в конкретных случаях число совпадений этой функции значительно больше двух.

Найдем число совпадений значений функции Эйлера (от 2 до b) на таком интервале (а заодно посмотрим и решения соответствующего уравнения):
$>$ $with(numtheory)$:
b := ___:
for i from 2 *to b by* 1 *do*
print(____):*print* (i): *print*(___):

```
for j from 1 to a by 1
do if phi(j) = i then print(j):
else fi od; od;
```

Техника позволяет исследовать функцию изменения расстояния до ближайшего совпадения $\phi(n)$, среднее число совпадений на интервале и т. п.

Гипотеза о близнецах

Два простых числа p и $p+2$ в школе Пифагора назвали *близнецами*. Близнецы могут быть очень большими, и вполне возможно, что множество близнецов бесконечно. Близнецы встречаются достаточно часто. Поиск пары близнецов в интервале $[a, a+b]$ даже для больших чисел a и сравнительно небольших b быстро приводит к успеху. Например, в интервале $[10^{30}, 10^{30}+10\,000]$ содержатся две пары близнецов:

```
> a:= 10^30: b:= 10000: k:=0:
for i from nextprime(a) to a + b
by 2 do if isprime(i) and isprime(i + 2)
then print(i):
print(i + 2):
print(_):
k:=k+1:
print(k):
else fi od ;
```

1000000000000000000000000001681

1000000000000000000000000001683

_

1

1000000000000000000000000004831

1000000000000000000000000004833

-

2

Если определить значение $a := 10\hat{}100$, $b := 100\,000$, то машина сразу укажет пять пар близнецов, в записи которых по 100 цифр:

$$10^{100} + 35\,737 \text{ и } 10^{100} + 35\,739,$$

$$10^{100} + 58\,291 \text{ и } 10^{100} + 58\,293,$$

$$10^{100} + 59\,257 \text{ и } 10^{100} + 59\,259,$$

$$10^{100} + 63\,361 \text{ и } 10^{100} + 63\,361,$$

$$10^{100} + 87\ 079 \text{ и } 10^{100} + 87\ 081.$$

С помощью пакета *Maple* можно осуществить поиск близнецов в заданном интервале, определить их среднюю плотность, сравнить ее с плотностью всех простых чисел, изучить изменения расстояния между соседними парами близнецов и т. п.
С помощью программы
```
> a:= 2: b:= ___:
pi(b) - pi(a); k := 0:
for i from nextprime(a)
to b by 2 do
if i sprime(i) and isprime(i + 2)
then k := k + 1:
else fi od;
```
можно увидеть распределение близнецов в числовых интервалах вплоть до 10^{10}. Например, в интервале

$$[10\ 000\ 000\ 000,\ 10\ 000\ 150\ 000]$$

из 6511 простых чисел 389 пар являются близнецами.

Гипотеза о совершенных числах

Число называется *совершенным* (красивым), если оно совпадает с суммой своих собственных делителей. Например, числа 6, 28, 496, 8128 – совершенные.

Хотя во времена Пифагора были известны всего лишь первые четыре совершенных числа, сразу появилась гипотеза, что множество совершенных чисел бесконечно (красоте нет предела). Даже сейчас, когда благодаря вычислительной технике, становятся доступными для экспериментов числа с сотнями миллионов цифр, вопрос о совершенных числах, по существу, продвинулся недалеко.

Древние знали четыре совершенных числа, а сейчас их известно 51, но главный вопрос — конечно или бесконечно это можество — остается пока без ответа.

Все найденные пока совершенные числа являются четными, поэтому неизвестно даже, существуют ли нечетные совершенные числа.

Задав конкретные значения a, b в программе:
```
> k := 0 : a := ___: b := ___:
for i from a to a + b by 1 do
if sigma(i) - i = i
and irem(i, 2) > 0
then print(i): k := k + 1:
else fi od;
print(k):
```
можно попытаться найти все нечетные совершенные числа из промежутка $[a, b]$.

Техника позволяет непосредственно убедиться, что в интервале $[1, 10^{2\ 000\ 000}]$ нет ни одного нечетного совершенного числа. Убрав из программы требование нечетности числа i, можно найти все совершенные числа из интервала $[1, 10^{2\ 000\ 000}]$:
```
>k := 0:
for i from 1 to 10^2000000
by 1 do
```

```
if sigma(i) − i = i
then print(i): k := k + 1:
length(i):
print(k):
print(_______):
else fi od;
```

В программу вставлена команда, определяющая число цифр в десятичной записи kго совершенного числа. Последнее (36-е) совершенное число из этого интервала имеет 1 791 864 цифр.

Четное число a совершенно тогда и только тогда, когда $a = 2^{n-1} \cdot p$, где p — простое число вида $2^n - 1$. Простое число вида $M_n = 2^n - 1$ называют *числом Мерсенна*. Вопрос о мощности множества четных совершенных чисел сводится к вопросу о мощности множества чисел Мерсенна.

В течение последних десятилетий нахождение каждого нового числа Мерсенна было связано, как правило, с появлением очередного поколения вычислительной техники и являлось демонстрацией возможностей этой новой техники. Все числа Мерсенна, начиная с 13-го, были найдены только с помощью вычислительной техники. Последнее, пятьдесят первое число Мерсенна $2^{82589933} - 1$ было найдено в 2018 году.

Программа

```
> k := 0:
for i from 1 to 10^3000000
by 1 do
if isprime(2^i − 1)
then print(i):
print(2^i − 1):
print(length(i)):
k := k + 1: print(k):
print(______):
else fi od;
```

позволяет найти 36 чисел Мерсенна, лежащих в интервале $[1, 10^{1\,000\,000}]$.

Гипотеза о дружественных числах

Одновременно с задачей о совершенных числах появилась и задача о *дружественных числах*. Два числа называют *дружественными*, если сумма собственных делителей каждого из них равна другому числу.

Пока неизвестно, конечно или бесконечно множество пар дружественных чисел. Исторически так случилось, что пары дружественных (даже не очень больших) чисел находились с трудом. После первой пары (220 и 284), найденной еще древними греками, до нахождения следующих трех пар прошло более двух тысяч лет.

Вычислительная техника позволяет сравнительно легко находить все пары дружественных чисел в достаточно большом отрезке натурального ряда:

```
> k := 0:
for i from 2 to 10^1000000
by 1 do
if sigma(sigma(i) − i) = sigma(i)
```

```
and i <sigma(i) − i
then k := k + 1:
print(i):
print(sigma(i) − i):
print(k): print(___):
else fi od;
```

Если убрать условие $i < sigma(i) - i$, то программа заодно выдаст и все совершенные числа из этого интервала (а каждую дружественную пару выведет дважды). Пока не найдено ни одной пары дружественных чисел разной четности (но нет и доказательства того, что в такой паре оба числа должны быть непременно одной четности). Можно попытаться поискать пару разной четности в интервале $[a, b]$:

```
> with(numtheory):
a := __: b := __:
k := 0:
for i from a to b by 1 do
if sigma(sigma(i) − i) = sigma(i)
and i<sigma(i) − i
and irem(sigma(i) − i , 2) > 0
then k := k + 1:
print(i): print(sigma(i) − i):
print(k):
print(______):
else fi od;
```

Вычисления по этой программе при $a = 1$ и $b = 10^{9999}$ показывают, что в интервале $[1, 10^{9999}]$ дружественных чисел различной четности нет.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

[1] Горюшкин А. П., “О методике применения современных вычислительных технологий при изучении теории чисел”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, **30**:1 (2020), 64–71. [Goryushkin A. P., “O metodike primeneniya sovremennykh vychislitel’nykh tekhnologiy pri izuchenii teorii chisel”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, **30**:1 (2020), 64–71 (in Russian)].

[2] Горюшкин А. П., “О применении компьютерной техники при изучении дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов»”, *Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе*. Т. 8, 2020, 97–105. [Goryushkin A. P., “O primenenii komp’yuternoy tekhniki pri izuchenii distsipliny «Matematicheskaya logika i teoriya algoritmov»”, *Aktual’nyye problemy prepodavaniya matematiki v tekhnicheskom vuze*. V. 8, 2020, 97–105 (in Russian)].

[3] Горюшкин А. П., “Решение теоретико-числовых задач средствами *Maple*”, *Математика и методика ее преподавания*, Сборник научно-методических трудов. Т. 6, Изд-во Камчатского гос. ун-та им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 2011, 54–89. [Goryushkin A. P., “Resheniye teoretiko-chislovykh zadach sredstvami *Maple*”, *Matematika i metodika yeye prepodavaniya*, Sbornik nauchno-metodicheskikh trudov. V. 6, Izd-vo Kamchatskogo gos. un-ta im. Vitusa Beringa, Petropavlovsk-Kamchatskiy, 2011, 54–89 (in Russian)].

MSC 03G05 Research Article

On the use of computer technology in the study of the discipline "Numbers theory"

A. P. Goryushkin

Kamchatka State University by Vitus Bering, 683032, PetropavlovskKamchatskiy, Pogranichnaya st, 4, Russia
E-mail: as2021@mail. ru

Problems related to computer tests of number-theoretic hypotheses are discussed. New machine methods for finding twin primes, perfect and friendly numbers, Goldbach decomposition, and testing the Carmichael hypothesis are proposed.

Key words: prime numbers, Euler's function, prime numbers are the twins, the algorithm, the perfect number, a friendly number

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-63-70

Original article submitted: 09.02.2021 Revision submitted: 09.03.2021

For citation. Goryushkin A. P. On the use of computer technology in the study of the discipline "Numbers theory". *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **35**: 2, 63-70. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-63-70

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.