УДК 519.644

Научная статья

О приближении определенных интегралов составными квадратурными формулами с использованием производных

В. В. Шустов

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем, 125319, г. Москва, ул. Викторенко, дом 7

E-mail: vshustov@gosniias.ru

Рассмотрена задача вычисления определенного интеграла функции, для которой известны значения ее самой и набора производных до заданного порядка в точках отрезка интегрирования. Построены составные квадратурные формулы, которые используют значения функции и ее производных до m -го порядка включительно. Получено представление остаточного члена, выраженное через производную соответствующего порядка и число узловых точек. Приведены примеры интегрирования заданных функций с исследованием погрешности и ее оценки. Дано сравнение с известными численными методами и формулой Эйлера-Маклорена, которое показало повышенную точность и лучшую сходимость метода двухточечного интегрирования.

Ключевые слова: квадратурные формулы с использованием производных, составная квадратурная формула, остаточный член интегрирования, оценка погрешности приближения, формула Эйлера-Маклорена

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-88-104

Поступила в редакцию: 29.12.2020

В окончательном варианте: 21.03.2021

Для цитирования. Шустов В.В. О приближении определенных интегралов составными квадратурными формулами с использованием производных // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 34. № 1. С. 88-104. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-88-104

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Шустов В. В., 2021

Введение

Известными методами вычисления определенных интегралов являются методы трапеций, Симпсона, Гаусса, Чебышева и другие, изложенные в учебниках общего плана [1]-[7], более специализированных изданиях [8]-[9] и других работах. В этих методах для приближения определенных интегралов используются только значения функции, заданных в узловых точках отрезка интегрирования. В тоже время для функций, обладающих определенной степенью гладкости, представляет интерес и является важным в теоретическом и практическом отношении использование

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

также значений ее производных в этих точках. Известным методом интегрирования, в котором используются значения производных, является метод, основанный на применении формулы Эйлера-Маклорена. Однако в этом методе, как отмечено в [10, с. 544] получается ряд, который, вообще говоря, расходится.

В работах [11] и [16] предложен метод интегрирования, основанный на использовании двухточечных многочленов Эрмита в варианте, когда производные заданы только на концах отрезка интегрирования.

В рамках развития предложенного метода в настоящей работе рассматривается случай, когда производные заданы не только на концах отрезка интегрирования, но и в узловых точках, расположенных внутри этого отрезка. В этом случае используется подход, согласно которому весь отрезок интегрирования разбивается узловыми точками на элементарные отрезки, на границах которых заданы значения функции и ее производных до некоторого порядка, а также используется аддитивность операции интегрирования относительно промежутка интегрирования.

Необходимость получения и использования составных квадратурных формул обусловлена тем, что в ряде случаев трудно или невозможно получить данные о производных высокого порядка, или сходимость процесса интегрирования не является удовлетворительной.

Задача интегрирования функции со многими узловыми точками сводится к аналогичной задаче только с двумя точками, расположенными на концах отрезка интегрирования. Эта задача решена и представлена в работах [16] и [17], в которых для построения квадратурных формул используется двухточечные интерполяционные многочлены Эрмита [12]. При этом рассматривается общий случай, когда узловые точки могут быть расположены на разных расстояниях друг от друга.

1. Постановка и решение задачи

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_0, x_n]$ и является дифференцируемой на этом отрезке достаточное число раз. Пусть также в $n+1$ узловых точках x_i , $i = 0, 1, \dots, n$, таких что

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

этого отрезка заданы значения функции $f(x)$ и ее производных до порядка m включительно:

$$f^{(j)}(x_i) = f_i^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Из условия существования производных следует, что для функции $f(x)$ существует интеграл I , определенный формулой

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx. \quad (2)$$

Необходимо построить квадратурную формулу для интеграла I_m , который приближает интеграл I в соответствии с формулой

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = I_m + r_m, \quad (3)$$

и использует условия (1), а также получить и оценить ее остаточный член приближения r_m .

В силу аддитивности операции интегрирования, в соответствии которой интеграл по отрезку $[x_0, x_n]$ равен сумме интегралов по составляющим его локальным отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, имеет место формула

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx. \quad (4)$$

Согласно результатам, представленным в [11, с. 85] и [16], интеграл по локальному отрезку $[x_i, x_{i+1}]$ при условиях (1) в наших обозначениях может быть представлен в виде

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx = \sum_{j=0}^m D_m^j h_i^{j+1} [f_i^{(j)} + (-1)^j f_{i+1}^{(j)}] + r_i, \quad (5)$$

$$D_m^j = \frac{C_{m+1}^{j+1}}{(j+1)! C_{2m+2}^{j+1}},$$

$$r_i = \frac{(-1)^{m+1} f^{(2m+2)}(\eta_i) h_i^{2m+3} (m+1)! (m+1)!}{(2m+2)! (2m+3)!}, \quad (6)$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$ и точки $\eta_i \in (x_i, x_{i+1})$. Здесь C_m^j — биномиальный коэффициент. Формулу (4) для интеграла I с учетом (5) можно записать в виде

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^m D_m^j h_i^{j+1} [f_i^{(j)} + (-1)^j f_{i+1}^{(j)}] + r_i \right), \quad (7)$$

а также, раскрывая скобки в (7), в виде

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m D_m^j h_i^{j+1} [f_i^{(j)} + (-1)^j f_{i+1}^{(j)}] + \sum_{i=0}^{n-1} r_i. \quad (8)$$

Из формул (3) и (7) следует, что интеграл I_m может быть записан в виде

$$I_m = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m D_m^j h_i^{j+1} [f_i^{(j)} + (-1)^j f_{i+1}^{(j)}],$$

а остаточный член r_m как

$$r_m = \sum_{i=0}^{n-1} r_i. \quad (9)$$

Подставляя соотношение (6) в (8), вынося коэффициенты, не зависящие от переменной i перед знаком суммирования по этой переменной и используя (9), получим, что для остаточного члена r_m имеет место соотношение

$$r_m = \frac{(-1)^{m+1} b_m}{(2m+2)!} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{2m+3} f^{(2m+2)}(\eta_i). \quad (10)$$

В соответствии с полученными результатами имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (1). Тогда для определенного интеграла этой функции имеет место

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = I_m + r_m, \quad (11)$$

где составная квадратурная формула представления интеграла I_m имеет вид

$$I_m = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m D_m^j h_i^{j+1} [f_i^{(j)} + (-1)^j f_{i+1}^{(j)}], \quad (12)$$

$$D_m^j = \frac{C_{m+1}^{j+1}}{(j+1)! C_{2m+2}^{j+1}},$$

остаточный член r_m есть

$$r_m = \frac{(-1)^{m+1} b_m}{(2m+2)!} \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{2m+3} f^{(2m+2)}(\eta_i), \quad (13)$$

коэффициенты двухточечного интегрирования b_m представляются как

$$b_m = \frac{(m+1)!(m+1)!}{(2m+3)!}, \quad (14)$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$ и точки $\eta_i \in (x_i, x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. Здесь C_m^j — биномиальный коэффициент.

Формулу (12) для интеграла I_m , изменяя порядки суммирования по индексам i и j и вынося коэффициент, не зависящий от индекса i из-под знака его суммирования, можно представить также в виде

$$I_m = \sum_{j=0}^m D_m^j \sum_{i=0}^{n-1} h_i^{j+1} [f_i^{(j)} + (-1)^j f_{i+1}^{(j)}]. \quad (15)$$

Частный случай. При равномерном распределении узловых точек, при котором шаг между узловыми точками один и тот же:

$$h_i = h, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

формулы интегрирования можно упростить.

Формула (15) для интеграла I_m при этом условии принимает вид:

$$I_m = \sum_{j=0}^m D_m^j h^{j+1} \sum_{i=0}^{n-1} [f_i^{(j)} + (-1)^j f_{i+1}^{(j)}], \quad (16)$$

которую также можно записать как

$$I_m = \sum_{j=0}^m \frac{D_m^j L^{j+1}}{n^{j+1}} \sum_{i=0}^{n-1} [f_i^{(j)} + (-1)^j f_{i+1}^{(j)}], \quad (17)$$

где длина $L = x_n - x_0$ отрезка $[x_0, x_n]$ связана с шагом h и числом отрезков разбиения n соотношением

$$h = \frac{L}{n}. \quad (18)$$

Формула (10) для остаточного члена r_m запишется как:

$$r_m = \frac{(-1)^{m+1} b_m h^{2m+3}}{(2m+2)!} \sum_{i=0}^{n-1} f^{(2m+2)}(\eta_i). \quad (19)$$

Для упрощения суммы, стоящей в правой части (19), применим теорему о среднем для определенного интеграла (например, [13, с. 400]), согласно которой, если функция $F(x)$ является непрерывной на отрезке $[a, b]$, то существует точка $\eta \in (a, b)$, такая, что

$$\int_a^b F(x) dx = F(\eta)(b-a).$$

Применяя теорему о среднем для интеграла по всему отрезку $[x_0, x_n]$, можно записать:

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x) dx = F(\eta)(x_n - x_0) = F(\eta)nh.$$

С другой стороны, применяя теорему о среднем для совокупности интегралов по всем отрезкам $[x_i, x_{i+1}]$ и используя аддитивность операции интегрирования, получим, что

$$\int_{x_0}^{x_n} F(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} F(\eta_i)(x_{i+1} - x_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} F(\eta_i).$$

Из сравнения обеих цепочек равенств следует, что имеет место равенство

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(\eta_i) = nF(\eta),$$

в соответствии с которым выполняется соотношение

$$\sum_{i=0}^{n-1} f^{(2m+2)}(\eta_i) = n f^{(2m+2)}(\eta).$$

С использованием этой формулы выражение (19) для остаточного члена r_m запишется в виде:

$$r_m = \frac{(-1)^{m+1} b_m n h^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\eta), \quad (20)$$

а также с учетом (18) в виде

$$r_m = \frac{(-1)^{m+1} b_m L^{2m+3}}{(2m+2)! n^{2m+2}} f^{(2m+2)}(\eta). \quad (21)$$

Следствие 1. Пусть производная функции порядка $2m+2$ включительно на отрезке $[x_0, x_n]$ ограничена некоторой константой $M_{2m+2} > 0$, т.е. считаем, что

$$|f^{(2m+2)}(x)| \leq M_{2m+2}, \quad x \in (x_0, x_n).$$

Тогда для погрешности приближения интеграла $\delta_m = |r_m|$ имеет место

$$\delta_m \leq \Delta_m,$$

где Δ_m обозначена оценка погрешности приближения

$$\Delta_m = \frac{b_m n h^{2m+3}}{(2m+2)!} M_{2m+2},$$

которую с использованием (18) также можно записать в виде:

$$\Delta_m = \frac{b_m L^{2m+3}}{(2m+2)! n^{2m+2}} M_{2m+2}. \quad (22)$$

Таблица 1

Формулы численного интегрирования

m	Формулы для интеграла I_m
0	$I_0 = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n)$
1	$I_1 = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) + \frac{h^2}{12}(f'_0 - f'_n)$
2	$I_2 = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) + \frac{h^2}{10}(f'_0 - f'_n) + \frac{h^3}{120}(f''_0 + 2f''_1 + \dots + 2f''_{n-1} + f''_n)$
3	$I_3 = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) + \frac{3h^2}{28}(f'_0 - f'_n) + \frac{h^3}{84}(f''_0 + 2f''_1 + \dots + 2f''_{n-1} + f''_n) + \frac{h^4}{1680}(f'''_0 - f'''_n)$
4	$I_4 = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) + \frac{h^2}{9}(f'_0 - f'_n) + \frac{h^3}{72}(f''_0 + 2f''_1 + \dots + 2f''_{n-1} + f''_n) + \frac{h^4}{1008}(f'''_0 - f'''_n) + \frac{h^5}{30240}(f^{(4)}_0 + 2f^{(4)}_1 + \dots + 2f^{(4)}_{n-1} + f^{(4)}_n)$
5	$I_5 = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n) + \frac{5h^2}{44}(f'_0 - f'_n) + \frac{h^3}{66}(f''_0 + 2f''_1 + \dots + 2f''_{n-1} + f''_n) + \frac{h^4}{792}(f'''_0 - f'''_n) + \frac{h^5}{15840}(f^{(4)}_0 + 2f^{(4)}_1 + \dots + 2f^{(4)}_{n-1} + f^{(4)}_n) + \frac{h^6}{665280}(f^{(5)}_0 - f^{(5)}_n)$

В табл. 1 приведены формулы интегрирования, которые являются частными случаями общей квадратурной формулы (15) для начальных значений m .

Из формулы (12) и из формул, представленных в табл. 1, видно, что каждая формула является суммой компонент, каждая из которых отвечает определенному значению порядка m используемых производных. При этом для четных m в каждой компоненте суммируются значения производных во всех узловых точках, причем для внутренних точек эти значения удваиваются. Для нечетных же значений m соответствующий компонент использует разность значений производных только в конечных точках, т.к. в силу структуры формулы (12) сумма значений производных нечетного порядка во внутренних точках обнуляется.

Можно отметить, что формула, размещенная в строке со значением $m=0$, соответствует составной квадратурной формуле метода трапеций.

Таблица 2

Выражения для оценки погрешности интегрирования ΔI_m

m	$\frac{1}{(2m+2)!}$	b_m	ΔI_m
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{M_2 n h^3}{12}$
1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{M_4 n h^5}{720}$
2	$\frac{1}{720}$	$\frac{1}{140}$	$\frac{M_6 n h^7}{100800}$
3	$\frac{1}{40320}$	$\frac{1}{630}$	$\frac{M_8 n h^9}{25401600}$
4	$\frac{1}{3628800}$	$\frac{1}{2772}$	$\frac{M_{10} n h^{11}}{10059033600}$
5	$\frac{1}{479001600}$	$\frac{1}{12012}$	$\frac{M_{12} n h^{13}}{5753767219200}$
6	$\frac{1}{87178291200}$	$\frac{1}{51480}$	$\frac{M_{14} n h^{15}}{4487938430976000}$

В табл. 2 приведены выражения для оценки погрешности интегрирования ΔI_m и компоненты ее представления для начальных значений параметра m .

Из табл. 2 видно, что оценка погрешности интегрирования при $m=0$, представленная формулой $\Delta I_0 = \frac{M_2 n h^3}{12}$, соответствует оценке погрешности метода трапеций (см., например, [4, с. 107]).

2. Результаты численного эксперимента

В качестве примера применения полученных составных квадратурных формул и оценки их точности вычислим значение интеграла от функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$, т.е.

$$I = \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

Точное значение этого интеграла легко определяется аналитически и есть $I = 2$.

Используя квадратурные формулы, представленные в табл. 1, и значения производных подынтегральной функции, определяемые соотношением ([13, с.149]):

$$(\sin x)^{(j)} = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} j\right), \quad (23)$$

вычислены значения интеграла I_m и численной погрешности δI_m для различных значений m и числа отрезков разбиения n .

Численные значения I_m и погрешности приближения δI_m для значений $m = 0 - 7$ и числа отрезков разбиения n представлены в табл. 3.

Таблица 3

Значения интеграла I_m и его погрешности δI_m для различных m и n

n m	1	2	4	8	16
0	0.0000000 2.0000000	1.5707963 0.42920367	1.8961189 0.10388110	1.9742316 0.025768398	1.9935703 0.0064296562
1	1.6449341 0.35506593	1.9820298 0.017970156	1.9989273 0.0010727229	1.9999337 0.000066303260	1.9999959 4.1325290x10 ⁻⁶
2	1.9739209 0.026079120	1.9996801 0.00031986290	1.9999953 4.7381119x10 ⁻⁶	1.9999999 7.3078996x10 ⁻⁸	2.0000000 1.1381883x10 ⁻⁹
3	1.9989520 0.0010479748	1.9999968 3.1515877x10 ⁻⁶	2.0000000 1.1616152x10 ⁻⁸	2.0000000 4.4738457x10 ⁻¹¹	2.0000000 1.7414686x10 ⁻¹³
4	1.9999734 0.000026583556	2.0000000 1.9722292x10 ⁻⁸	2.0000000 1.8114062x10 ⁻¹¹	2.0000000 1.7427003x10 ⁻¹⁴	2.0000000 1.6955457x10 ⁻¹⁷
5	1.9999995 4.6462431x10 ⁻⁷	2.0000000 8.5345467x10 ⁻¹¹	2.0000000 1.9549848x10 ⁻¹⁴	2.0000000 4.6992911x10 ⁻¹⁸	2.0000000 1.1428645x10 ⁻²¹
6	2.0000000 5.9369402x10 ⁻⁹	2.0000000 2.7063220x10 ⁻¹³	2.0000000 1.5470038x10 ⁻¹⁷	2.0000000 9.2922992x10 ⁻²²	2.0000000 5.6490617x10 ⁻²⁶
7	2.0000000 5.7891324x10 ⁻¹¹	2.0000000 6.5591947x10 ⁻¹⁶	2.0000000 9.3600562x10 ⁻²¹	2.0000000 1.4050592x10 ⁻²⁵	2.0000000 2.1352508x10 ⁻³⁰

В каждой ячейке таблицы сверху представлены значения интеграла I_m , снизу приведены значения погрешности приближения δI_m , как модуля разности между

точным и приближенным значениями интегралов, определенной по формуле

$$\delta I_m = \left| \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} H_m(x) dx \right|. \quad (24)$$

Из данных, представленных в табл. 3, видно, что как с увеличением числа узловых точек n , так и с увеличением порядка производных m последовательные приближения интеграла I_m сходятся к точному его значению I , однако с разной скоростью. Если для метода трапеций, отвечающего значению $m = 0$, скорость сходимости является самой малой, то с увеличением порядка производных m скорость сходимости приближений существенно возрастает и обеспечивает необходимую точность уже при малом числе точек разбиения n .

Влияние параметров n и m на скорость сходимости хорошо видно при представлении результатов расчета в графической форме, как это показано на рис. 1 и рис. 2.

Рис. 1. Зависимость оценки погрешности $\Delta(n)$ для значений $m = 0 - 7$

Рис. 2. Зависимость погрешности $\Delta(m)$ для значений $n = 1 - 8$

На этих рисунках представлена оценка погрешности приближения, определенная формулой (22), с константой $M_{2m+2} = 1$, т.е.

$$\Delta = \frac{b_m L^{2m+3}}{(2m+2)! n^{2m+2}},$$

представленная в параметрической форме $\Delta(n)$ и $\Delta(m)$ в виде зависимости ее от n и m , соответственно. Отметим, что из-за большого диапазона изменения для осей ординат используется логарифмическая шкала. Зависимости $\Delta(n)$ и $\Delta(m)$ представлены в виде точек, соединенных отрезками прямых.

Из представленных графиков видно, что оценка погрешности монотонно убывает как с возрастанием порядка производных m , так и с увеличением числа узловых точек n , причем скорость убывания погрешности увеличивается с возрастанием m (см. рис. 1).

3. Сравнение результатов, полученных по двухточечной формуле интегрирования и по формуле Эйлера-Маклорена

Интересно сравнить предложенные квадратурные формулы с другими подходами, которые также используют значения функции и ее производных на отрезке интегрирования, в частности, основанными на применении формулы Эйлера-Маклорена.

Представим в этом случае интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$$

аналогично в виде

$$I = E_m + rE_m,$$

где приближенное значение интеграла E_m выражается формулой Эйлера-Маклорена (например, [14, с. 136]), записанной в наших обозначениях как

$$E_m = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n] + \sum_{j=1}^m \frac{B_{2j} h^{2j}}{(2j)!} [f_0^{(2j-1)} - f_1^{(2j-1)}], \quad (25)$$

rE_m – остаточный член, который согласно [1, с. 292] представляется как

$$rE_m = -\frac{B_{2m+2} n h^{2m+3}}{(2m+2)!} f^{(2m+2)}(\lambda), \lambda \in (x_0, x_n), \quad (26)$$

где B_{2j} – числа Бернулли, рассмотренные, например, в [1, с. 292]. Числа Бернулли представляется формулой

$$B_{2m} = (-1)^{m+1} \frac{2(2m)!}{(2\pi)^{2m}} \zeta(2m), \quad (27)$$

где $\zeta(s)$ — дзета-функция Римана (например, [10, с. 263]), определенная как

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s},$$

и обладающая свойством [1, с. 293], что $\zeta(s) \rightarrow 1$ при $s \rightarrow \infty$.

Формулу Эйлера-Маклорена также можно записать в развернутом виде

$$E_m = \frac{h}{2}[f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n] + \frac{B_2 h^2}{2!}[f'_0 - f'_n] + \frac{B_4 h^4}{4!}[f'''_0 - f'''_n] + \dots + \quad (28)$$

$$+ \frac{B_{2m} h^{2m}}{(2m)!}[f^{(2m-1)}_0 - f^{(2m-1)}_n].$$

Сравнение формул (16) и (28) показывает, что в отличие от формулы двухточечного интегрирования, в которую входят производные как четного, так и нечетного порядков, формула Эйлера-Маклорена содержит производные только нечетного порядка.

Для погрешности приближения $\delta E_m = |rE_m|$ формулы Эйлера-Маклорена при условии, что производная функции порядка $2m+2$ включительно на отрезке $[x_0, x_1]$ ограничена некоторой константой $M_{2m+2} > 0$, т.е. считая, что

$$|f^{(2m+2)}(x)| \leq M_{2m+2}, \quad x \in (x_0, x_1),$$

имеет место

$$\delta E_m \leq \Delta E_m,$$

где ΔE_m обозначена оценка погрешности приближения интегрирования

$$\Delta E_m = \frac{|B_{2m+2}| n h^{2m+3}}{(2m+2)!} M_{2m+2}. \quad (29)$$

С целью сопоставления обоих методов интегрирования проведены расчеты с использованием квадратурной формулы Эйлера-Маклорена для двух тестовых функций.

Численный пример 1

В первом примере проведено вычисление ранее рассмотренного в разделе 2 интеграла

$$I = \int_0^\pi \sin x dx,$$

с использованием формулы (25) и его погрешности, определенной формулой (24).

Результаты расчетов в виде приближенных значений интегралов E_m и их численных погрешностей δE_m представлены в соответствующих столбцах табл. 4. В каждой ячейке этой таблицы вверху приводятся значение интеграла E_m , внизу приводится значение его погрешности δE_m . Для сопоставления в этой же таблице приведены значения интеграла I_m , полученного по формуле двухточечного интегрирования и его погрешности δI_m , также в соответствующих столбцах.

Анализ данных, представленных в таблице, показал, что приближения интеграла, полученные по двухточечной формуле и по формуле Эйлера-Маклорена, сходятся к точному значению интеграла как с увеличением m , так и с увеличением n . При этом значения погрешности двухточечной формулы при $m > 2$ меньше, чем значения погрешности формулы Эйлера-Маклорена.

Таблица 4

Значения интеграла I_m и его погрешности δI_m для $n = 1, 2, 4$, полученные по двухточечной формуле и по формуле Эйлера-Маклорена

n m	1 новый метод	1 метод Эйлера- Маклорена	2 новый метод	2 метод Эйлера- Маклорена	4 новый метод	4 метод Эйлера- Маклорена
0	0.0000000 2.0000000	0.0000000 2.0000000	1.5707963 0.4292037	1.5707963 0.4292037	1.8961189 0.1038811	1.8961189 0.1038811
1	1.6449341 0.3550659	1.6449341 0.3550659	1.9820298 0.0179702	1.9820298 0.0179702	1.9989273 0.0010727	1.9989273 0.0010727
2	1.9739209 0.0260791	1.9155149 0.0844851	1.9996801 0.0003199	1.9989411 0.0010589	1.9999953 4.738×10^{-6}	1.9999842 0.0000158
3	1.9989520 0.0010480	1.9790988 0.0209011	1.9999968 3.152×10^{-6}	1.9999346 6.536×10^{-5}	2.0000000 1.162×10^{-8}	1.9999998 2.432×10^{-7}
4	1.9999734 0.0000266	1.9947875 0.0052125	2.0000000 1.972×10^{-8}	1.9999959 4.073×10^{-6}	2.0000000 1.811×10^{-11}	2.0000000 3.788×10^{-9}
5	1.9999995 4.646×10^{-7}	1.9986977 0.0013023	2.0000000 8.535×10^{-11}	1.9999997 2.544×10^{-7}	2.0000000 1.955×10^{-14}	2.0000000 5.915×10^{-11}
6	2.0000000 5.937×10^{-9}	1.9996745 3.2610^{-4}	2.0000000 2.706×10^{-13}	2.0000000 1.590×10^{-8}	2.0000000 1.547×10^{-17}	2.0000000 9.240×10^{-13}
7	2.0000000 5.79×10^{-11}	1.9999186 8.14×10^{-5}	2.0000000 6.559×10^{-16}	2.0000000 9.934×10^{-10}	2.0000000 9.360×10^{-21}	2.0000000 1.444×10^{-14}

Рис. 3. Сравнение погрешности по формуле двухточечного интегрирования и Эйлера-Маклорена для функции $f(x) = \sin x$

На рис. 3 данные расчетов представлены в графической форме, которая наглядно показывает, что погрешность двухточечной формулы с возрастанием m при $m > 1$ уменьшается существенно быстрее, чем погрешность формулы Эйлера-Маклорена.

Из данных, представленных в табл. 4 и из рис. 3, следует, что, например, при $m = 7$ величина погрешности, полученной по двухточечной формуле интегрирования более, чем на шесть порядков меньше погрешности, полученной по формуле Эйлера-Маклорена для значений $n = 1, 2, 4$.

Численный пример 2

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x},$$

который может быть вычислен аналитически и значение которого равно $\ln 2 = 0.69314718 \dots$

Для подынтегральной функции в этом случае также существуют производные сколь угодно высокого порядка, которые представляются формулой

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(j)} = \frac{(-1)^j j!}{x^{j+1}}. \quad (30)$$

С использованием этой формулы и квадратурных формул, представленных в табл. 1, и формулы (28), получены численные значения интегралов с использованием двухточечного интегрирования и по формуле Эйлера-Маклорена.

Полученные численные данные в виде зависимости погрешности $\delta(m)$ при значении параметра $n = 1, 2$ для обоих методов представлены на рис. 4.

Рис. 4. Сравнение погрешности по формуле двухточечного интегрирования и Эйлера-Маклорена для функции $f(x) = 1/x$.

Из графиков, представленных на этом рисунке, видно, что с увеличением m погрешность интегрирования δ_m , рассчитанная по двухточечной формуле, монотонно убывает для всех n .

В тоже время погрешность интегрирования, полученная по формуле по Эйлера-Маклорена, с возрастанием m сначала убывает, затем, начиная с некоторого m , начинает резко увеличиваться, т.е. процесс приближения становится расходящимся. Значение критического числа m , начиная с которого погрешность начинает возрастать, зависит от n — числа точек разбиения отрезка интегрирования и монотонно увеличивается с увеличением n .

Такое поведение погрешности формулы по Эйлера-Маклорена для данного интеграла объясняется рассмотрением остаточного члена, модуль которого в соответствии с (26), (27), (30) и с учетом $L = 1$, может быть записан в виде

$$|rE_m| = \frac{2(2m+2)!}{(2\pi n)^{2m+2}} \frac{S_{2m+2}}{\eta^{2m+3}}, \eta \in (1, 2). \quad (31)$$

Из того, что первая дробь стремится к бесконечности при $m \rightarrow \infty$ и ограниченности второй дроби снизу некоторой константой при $m \rightarrow \infty$ следует, что $|rE_m| \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, т.е. процесс приближения расходится при любом фиксированном n . Однако это не исключает того, что при заданном значении n погрешность может сначала уменьшаться, достигнув некоторого минимума, и только затем начнет неограниченно возрастать, что и показывают результаты численного эксперимента, представленные на рис. 4.

Из формулы (31) следует, что модуль остаточного члена $|rE_m|$ имеет место $\Delta_m \leq |rE_m|$, где оценку погрешности снизу Δ_m можно представить в виде

$$\Delta_m = M\varphi(m),$$

$$\varphi(m) = \frac{(2m+2)!}{(2\pi n)^{2m+2}} \quad (32)$$

и M — некоторая константа.

На рис. 5 представлены графики зависимости функции $\varphi(m)$ для значений параметра $n = 1, 2, 3, 4$.

Рис. 5. Зависимость функции $\varphi(m)$ для значений параметра $n = 1, 2, 3, 4$

Сравнение рис. 4 и рис. 5 показывает, что поведение зависимостей погрешности и ее оценки качественно имеет близкий характер; при этом оценка погрешности, достигая некоторого минимума, также неограниченно увеличивается при $m \rightarrow \infty$ и минимальные значения m , при которых функция $\varphi(m)$ принимает минимальные значения, увеличиваются с увеличением n .

Качественный характер поведения функции $\varphi(m)$ можно исследовать, используя формулу Стирлинга [15, с. 491]

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \dots\right). \quad (33)$$

Вводя переменную $k = 2m + 2$ и ограничиваясь приближенным представлением $n!$ в виде

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

которое, однако, позволяет получить аналитическое решение, для функции $\varphi(k)$ в соответствии с (32) получим следующее представление:

$$\varphi(k) = \left(\frac{k}{2\pi en} \right)^k.$$

Для исследования функции $\varphi(k)$ дискретного аргумента k используем функцию

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{a} \right)^x$$

непрерывной переменной x и соответствующий аппарат математического анализа.

Дифференцируя функцию $\varphi(x)$, приравнявая производную нулю в соответствии с достаточным условием экстремума и решая линейное уравнение, получим для точек минимумов x_* формулу $x_* = 2\pi n$. Возвращаясь к переменной m , получим для точек минимума приближения функции $\varphi(m)$ соотношение

$$m_* = \pi n - 1.$$

Из этой формулы следует, что положения минимумов оценки погрешности увеличиваются с увеличением n , что подтверждается результатами расчета, представленными на рис. 5.

Из полученных результатов следует, что формула Эйлера-Маклорена для данного интеграла в случае фиксированного числа точек n приводит к тому, что процесс приближения при $m \rightarrow \infty$ расходится. Однако при этом для фиксированного порядка производной m можно подобрать число точек n так, чтобы приблизить интеграл с заданной точностью. Данный пример подтверждает, что в ряде случаев интегрирования с использованием формулы Эйлера-Маклорена образуется соответствующий ей ряд, который, как отмечено в [10, с. 544], «вообще говоря, расходится».

В тоже время из представленных на рис. 4 результатов видно, что погрешность δ_m интегрирования по двухточечной формуле монотонно убывает как с увеличением m , так и с увеличением n . При этом погрешность двухточечного интегрирования так же, как и в примере 1, начиная с $m = 2$ меньше, чем погрешность результатов, полученных по формуле Эйлера-Маклорена.

Сходимость результатов двухточечного интегрирования для данного примера определяется поведением остаточного члена rI_m , модуль которого в соответствии с (21), (30) и с учетом $L = 1$, может быть записан в виде

$$|rI_m| = \frac{b_m}{n^{2m+2}\mu^{2m+3}}, \mu \in (1, 2). \quad (34)$$

Поскольку коэффициенты b_m , определенные (14), стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$ (см. например, [16]), то модуль остаточного члена rI_m также стремятся к нулю при $m \rightarrow \infty$, что и обуславливает сходимость результатов двухточечного интегрирования для данной функции.

Заключение

В рамках решения задачи представления определенных интегралов с использованием производных получены составные квадратурные формулы, использующие производные заданного порядка на отрезке интегрирования.

Дано представление для остаточного члена, на основе которого получена оценка погрешности интегрирования, выраженная через производную функции соответствующего порядка.

Рассмотрен пример численного интегрирования функции, для которой известно точное значение интеграла и для которой существуют и ограничены производные сколь угодно высокого порядка. Приведенные численные данные о погрешности интегрирования и ее оценке показывают в этом случае сходимость интегральных приближений к интегралу от заданной функции, как при увеличении числа узловых точек, так и повышении порядка используемых производных.

Дано сравнение метода двухточечного интегрирования с подходом, основанном на использовании формулы Эйлера-Маклорена, которое показало, что для достаточно гладких функций точность двухточечного интегрирования существенно выше, чем по формуле Эйлера-Маклорена. Приведен пример интеграла, для которого его приближения, полученные с использованием формулы Эйлера-Маклорена, расходятся, а по формуле двухточечного интегрирования сходятся и достаточно быстро.

Предложенные составные квадратурные формулы могут использоваться в теоретических исследованиях и практических приложениях для вычисления определенных интегралов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литература/References

- [1] Березин И. С., *Методы вычислений*, Физматлит, М., 1962, 464 с. [Berezin I. S., *Metody vychisleniy*, Fizmatlit, M., 1962 (in Russian), 464 pp.]
- [2] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М., *Численные методы*, Учеб. пособие, Наука, М., 1987, 600 с. [Bakhvalov N. S., Zhidkov N. P., Kobel'kov G. M., *Chislennyye metody*, Ucheb. posobiye, Nauka, M., 1987 (in Russian), 600 pp.]
- [3] Вержбицкий В. М., *Численные методы*, ООО Издательский дом Оникс 21 век, М., 2005, 400 с. [Verzhbitskiy V. M., *Chislennyye metody*, ООО Izdatel'skiy dom Oniks 21 vek, M., 2005 (in Russian), 400 pp.]
- [4] Волков Е. А., *Численные методы*, Учеб. пособие для вузов, Наука, М., 1987, 248 с. [Volkov Ye. A., *Chislennyye metody*, Ucheb. posobiye dlya vuzov, Nauka, M., 1987 (in Russian), 248 pp.]
- [5] Хемминг Р. В., *Численные методы для научных работников и инженеров*, Наука, М., 1972, 400 с. [Khemming R. V., *Chislennyye metody dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*, Nauka, M., 1972 (in Russian), 400 pp.]
- [6] Шахов Ю. Н., Деца Е. И., *Численные методы*, Учебное пособие, Книжный дом Либроком, М., 2010, 248 с. [Shakhov Yu. N., Deza Ye. I., *Chislennyye metody*, Uchebnoye posobiye, Knizhnyy dom Librokom, M., 2010 (in Russian), 248 pp.]
- [7] Калиткин Н. Н., *Численные методы*, Учебное пособие, БХВ-Петербург, СПб., 2011, 592 с. [Kalitkin N. N., *Chislennyye metody*, Uchebnoye posobiye, BKHV-Peterburg, SPb., 2011 (in Russian), 592 pp.]
- [8] Крылов В. И., *Приближенное вычисление интегралов*, Наука, М., 1967, 500 с. [Krylov V. I., *Priblizhennoye vychisleniye integralov*, Nauka, M., 1967 (in Russian), 500 pp.]
- [9] Крылов В. И., *Квадратурные формулы*, Наука, М., 1988, 256 с. [Krylov V. I., *Kvadraturnyye formuly*, Nauka, M., 1988 (in Russian), 256 pp.]

- [10] Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2, Наука, М., 1970, 800 с. [Fikhtengol'ts G. M., *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya*. V. 2, Nauka, M., 1970 (in Russian), 800 pp.]
- [11] Шустов В. В., "О представлении интегралов значениями функции и ее производных на основе использования двухточечных многочленов Эрмита", *Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование*, тезисы докладов XIII Межд. научн. конф., Владикавказ, ЮМИ ВНЦ РАН, 2016, 85-87. [Shustov V. V., "O predstavlenii integralov znacheniyami funktsii i yeye proizvodnykh na osnove ispol'zovaniya dvukhtocheknykh mnogochlenov Ermita", *Teoriya operatorov, kompleksnyy analiz i matematicheskoye modelirovaniye*, tezisy dokladov XIII Mezhd. nauchn. konf., Vladikavkaz, YUMI VNTS RAN, 2016, 85-87 (in Russian)].
- [12] Шустов В. В., "О приближении функций двухточечными интерполяционными многочленами Эрмита", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **55:7** (2015), 1091-1108. [Shustov V. V., "O priblizhenii funktsiy dvukhtocheknyimi interpol'yatsionnymi mnogochlenami Ermita", *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, **55:7** (2015), 1091-1108 (in Russian)].
- [13] Кудрявцев Л. Д., *Математический анализ*. Т. 1, Высшая школа, М., 1970 (in Russian), 592 с.
- [14] Корн Г., Корн Т., *Справочник по математике для научных работников и инженеров*, Наука, М., 1984, 832 с. [Korn G., Korn T., *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov*, Nauka, M., 1984 (in Russian), 832 pp.]
- [15] Грехем Р., Кнут Д., Паташник О., *Конкретная математика. Основание информатики*, Мир, М., 1998, 703 с. [Grekhem R., Knut D., Patashnik O., *Konkretnaya matematika. Osnovaniye informatiki*, Mir, M., 1998 (in Russian), 703 pp.]
- [16] Шустов В. В., "О представлении интегралов значениями функции и ее производных на основе использования двухточечных многочленов Эрмита", *Математический форум. (Итоги науки. Юг России)*. ЮМИ РАН, **11** (2017), 113-122. [Shustov V. V., "O predstavlenii integralov znacheniyami funktsii i yeye proizvodnykh na osnove ispol'zovaniya dvukhtocheknykh mnogochlenov Ermita", *Matematicheskiiy forum. (Itogi nauki. Yug Rossii)*. YUMI RAN, **11** (2017), 113-122 (in Russian)].
- [17] Шустов В. В., "О представлении определенных интегралов значениями функции и ее производных", *Владикавказский математический журнал*, **22:2** (2020), 83-97. [Shustov V. V., "O predstavlenii opredelennykh integralov znacheniyami funktsii i yeye proizvodnykh", *Vladikavkazskiy matematicheskiiy zhurnal*, **22:2** (2020), 83-97 (in Russian)].

MSC 41A55

Research Article

On approximation of definite integrals by compound quadrature formulas using derivatives

V. V. Shustov

State Research Institute of Aviation Systems, 125319, Moscow,
Viktorenko st., 7, Russia

E-mail: vshustov@gosniias.ru

The problem of computing a definite integral of a function for which the values of itself and the set of derivatives up to a given order at the points of the interval of integration are known is considered. Composite quadrature formulas are constructed that use the values of the function and its derivatives up to the m -th order inclusive. A representation of the remainder is obtained, expressed in terms of the derivative of the corresponding order and the number of nodal points. Examples of integration of the given functions with the study of the error and its estimation are given. A comparison is made with the known numerical methods and the Euler-Maclaurin formula, which showed increased accuracy and better convergence of the two-point integration method.

Key words: quadrature formulas using derivatives, compound quadrature formula, remainder of integration, approximation error estimate, Euler-Maclaurin formula

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-88-104

Original article submitted: 20.10.2020

Revision submitted: 03.02.2021

For citation. Shustov V. V. Analysis of the possibility of using Russian geomagnetic stations to calculate the analogue of the Dst-index. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **34**: 1, 88-104. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-88-104

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Shustov V. V., 2021

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.