УДК 517.956.4

Научная статья

Нелокальная задача с интегральным условием для нагруженного уравнения теплопроводности

М. М. Сагдуллаева

Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
Республика Узбекистан, 100174, Ташкент, ул. Университетская, 4
E-mail: sagdullayevmm@mail.ru

В работе рассмотрена нелокальная задача с интегральным условием для нагруженного уравнения теплопроводности, где нагруженное слагаемое представляет собой производную второго порядка от неизвестной функции в начале координат. Доказано существование и единственность регулярного решения. С помощью функции Грина и тепловых потенциалов доказано существование регулярного решения исследуемой задачи. Доказательство основано на редукции поставленной задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода со слабой особенностью. Из разрешимости полученных интегральных уравнений Вольтерра следует существование единственного решения поставленной задачи.

Ключевые слова: нелокальная задача, интегральное условие, нагруженное уравнение, теплопроводность, функция Грина.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-47-56

Поступила в редакцию: 22.01.2021

В окончательном варианте: 01.04.2021

Для цитирования. Сагдуллаева М. М. Нелокальная задача с интегральным условием для нагруженного уравнения теплопроводности // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 34. № 1. С. 47-56. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-47-56

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Сагдуллаева М. М., 2021

Постановка задачи

В настоящее время существенно возрос интерес к изучению краевых задач для нагруженных уравнений. В монографии [9] даются понятия и подробная классификация нагруженных уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод и почвенной влаги.

В работе [4] исследуются вопросы начально-краевых и спектральных задач для нагруженных дифференциальных операторов математической физики, когда нагруженные слагаемые не являются слабым возмущением дифференциальной части оператора. В работе [2], подобные задачи рассмотрены для уравнения

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства инновационного развития РУз, грант ОТ-Ф4-(36+32).

параболического типа с нагрузкой дробного порядка, а для других классов уравнений в работах [1, 6, 12, 13]. Отметим, работы [7, 8], где исследованы нелинейные нагруженные уравнения и связанные с ним обратные задачи.

В настоящей работе изучается нелокальная задача с интегральным условием для нагруженного уравнения теплопроводности в ограниченной области, где нагруженное слагаемое представляет собой производную второго порядка от неизвестной функции в начале координат.

В области $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим нагруженное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0}, \quad (1)$$

где $f(x, t)$ — заданная функция.

Нелокальная задача с интегральным условием для уравнения (1) ставится следующим образом:

Задача 1. Найти регулярное в области D решение $u(x, t)$ из класса $C(\bar{D})$ с непрерывной вплоть до $x = 0$ и $0 \leq t \leq T$ производной второго порядка по x , удовлетворяющее начальному

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

граничному

$$u_x(0, t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

и интегральным условием

$$\int_0^l u(x, t) dx = \int_0^t h(t, \tau) u(l, \tau) d\tau + \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где $\varphi(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $h(t, \tau)$ — заданные, непрерывные на $[0, l]$ и $[0, T]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi'(0) = \psi_1(0); \quad \int_0^l \varphi(x) dx = \psi_2(0).$$

Через $C^{k,l}(D)$ обозначен класс функций $u(x, t)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n} u(x, t) / \partial x^m \partial t^n$ для всех $m = \overline{0, k}$, $n = \overline{0, l}$; $C^{0,0}(D)$ обозначим через $C(D)$.

Определение. Под регулярным в области D решением уравнения (1) называется действительная функция $u(x, t)$, из класса $C^{2,1}(D) \cap C^{1,0}(\bar{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.

Сведение задачи 1 к интегральному уравнению относительно $u_{xx}(0, t)$

Сложность задачи 1 состоит в том, что в обе части граничного условия (4) входит неизвестное решение $u(x, t)$. Поэтому обозначим $u(l, t)$ через $\mu(t)$ и решим следующую задачу:

Задача 2. Найти решение $u(x, t)$ уравнение (5), удовлетворяющее условиям (2), (3) и

$$u(l, t) = \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5)$$

Затем определим функцию $\mu(t)$ из условия (4).

Будем решать задачу 2 в следующих предположениях: $\varphi(x)$ непрерывна и интегрируема на $[0, l]$, $\psi_1(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и предположим, что функция $\mu(t)$ непрерывна и интегрируема на $[0, T]$ и $\mu(0) = 0$.

Функция Грина задачи 2 задается формулой (см. например [3])

$$G(x, t; \xi, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n [U(x - \xi + 2nl, t - \tau) + U(x + \xi + 2nl, t - \tau)] \quad (6)$$

где $U(x, t; \xi, \tau)$ – фундаментальное решение уравнения теплопроводности,

$$U(x, t; \xi, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right], & t > \tau, \\ 0, & t \leq \tau. \end{cases}$$

Доказательство абсолютной и равномерной сходимости ряда (6) за исключением члена при $n = 0$ и рядов, полученных из него почленным дифференцированием любое число раз по x и t приведено в работе [11].

В силу свойства функции Грина $G(x, t; \xi, \tau)$ легко заметить, что решение задачи 2 в области D можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^l \varphi(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi - \int_0^t \mu(\tau) G_\xi(x, t; l, \tau) d\tau + \\ & + \int_0^t \psi_1(\tau) G(x, t; 0, \tau) d\tau + \int_0^t \int_0^l G(x, t; \xi, \tau) [f(\xi, \tau) - u_{xx}(0, \tau)] d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

В равенство (7) входит неизвестная функция $u_{xx}(0, t)$.

Введя обозначения

$$K(x, t, \tau) = \int_0^l G(x, t; \xi, \tau) d\xi; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} g(x, t) = & \int_0^t d\tau \int_0^l G(x, t; \xi, \tau) f(\xi, \tau) d\xi + \int_0^l \varphi(\xi) G(x, t; \xi, 0) d\xi + \\ & + \int_0^t \psi_1(\tau) G_\xi(x, t; 0, \tau) d\tau - \int_0^t \mu(\tau) G(x, t; l, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

то, из (3) получим интегро-дифференциальное уравнение

$$u(x, t) = - \int_0^t K(x, t, \tau) u_{xx}(0, \tau) d\tau + g(x, t). \quad (10)$$

Полученное уравнение будем решать методом сведения к интегральному уравнению относительно $u_{xx}(0, t)$. В дальнейшем, необходимо знать дифференциальные свойства ядра $K(x, t, \tau)$ и свободного члена $g(x, t)$ в окрестности точки $x = 0$.

1. Сначала исследуем дифференциальные свойства ядра $K(x, t, \tau)$.

Имеет место следующее утверждение:

Лемма 1. При $t > \tau$ и ядро $K(x, t, \tau) \in C_x^2(D)$ и при $x = 0$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial^2 K(x, t, \tau)}{\partial x^2} \right|_{x=0} \leq M.$$

Доказательство. Дифференцируя равенство (9) под знаком интеграла, имеем

$$\frac{\partial K}{\partial x} = - \int_0^l \frac{\partial G(x, t; \xi, \tau)}{\partial \xi} d\xi = -G(x, t; l, \tau) + G(x, t; 0, \tau).$$

Учитывая свойства функции Грина, получим

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} [U(x + (2n+1)l, t - \tau) + U(x + (2n-1)l, t - \tau)].$$

Отсюда еще раз дифференцируя по x , находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} & \left[\frac{x + (2n+1)l}{2(t-\tau)} U(x + (2n+1)l, t - \tau) - \right. \\ & \left. - \frac{x + (2n-1)l}{2(t-\tau)} U(x + (2n-1)l, t - \tau) \right]. \end{aligned}$$

В последнем равенстве полагая $x = 0$ получим

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n+1)l}{2(t-\tau)} \exp \left\{ -\frac{[(2n+1)l]^2}{4(t-\tau)} \right\}. \quad (11)$$

Общий член ряда (11) представим в виде

$$\begin{aligned} & \frac{(2n+1)l}{4\sqrt{\pi(t-\tau)^3}} \exp \left\{ -\frac{[(2n+1)l]^2}{4(t-\tau)} \right\} = \\ & = \frac{[(2n+1)l]^3}{4\sqrt{\pi}(\sqrt{t-\tau})^3} \exp \left\{ -\frac{[(2n+1)l]^2}{8(t-\tau)} \right\} \cdot \frac{1}{[(2n+1)l]^2} \exp \left\{ -\frac{[(2n+1)l]^2}{8(t-\tau)} \right\} \end{aligned}$$

Используя, известное неравенство [5, 10]

$$X^\gamma e^{-X} < M e^{-qX}$$

где $X > 0$, $\gamma \geq 0$, $M > 0$, $0 < q < 1$,

$$0 < \left\{ \frac{(2n+1)l}{2(t-\tau)} \right\}^3 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{(2n+1)l}{2\sqrt{t-\tau}} \right]^2 \right\} \leq M_0,$$

получим оценку для общего члена ряда (11)

$$\left| \frac{(2n+1)l}{2(t-\tau)} U((2n+1)l, t-\tau) \right| < \frac{2M_0}{\sqrt{\pi}[(2n+1)l]^2} \exp \left\{ -\frac{[(2n+1)l]^2}{8(t-\tau)} \right\}.$$

Так как $(2n+1)l \neq 0$ при $\forall n \in N$, то нетрудно убедиться, что знакопередающийся ряд в правой части (11) сходится абсолютно и равномерно, т. е.

$$\left| \frac{\partial^2 K(x, t, \tau)}{\partial x^2} \right|_{x=0} \leq M.$$

□

2. Теперь исследуем свободный член равенства (10). Функция $g(x, t)$ определенная равенством (10) состоит из суммы тепловых потенциалов [5, 10].

Лемма 2. Если $f(x, t) \in C(\overline{D})$, $\varphi(x) \in C(0, l)$, $\psi_1(t) \in C(0, +\infty)$, $\mu(t) \in C^1(0, +\infty)$ и $\mu(0) = 0$, то функция $g(x, t) \in C_x^2(D)$ и имеет место

$$\left| \frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} \leq M.$$

Доказательство. Для краткости доказательства, рассмотрим последнее слагаемое

$$g_4(x, t) = \int_0^t \mu(\tau) G(x, t; l, \tau) d\tau$$

При $x \neq 0$ и $t \neq \tau$, ядро $G(x, t; l, \tau) \in C_{x,t}^{2,1}(\overline{D})$. Дифференцируя два раза по x под знака интеграла имеем

$$\frac{\partial^2 g_4(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial^2 G(x, t; l, \tau)}{\partial x^2} d\tau = - \int_0^t \mu(\tau) \frac{\partial G(x, t; l, \tau)}{\partial \tau} d\tau.$$

Отсюда, интегрируя по частям и учитывая свойства функции Грина и $\mu(0) = 0$, получим

$$\frac{\partial^2 g_4(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t \mu'(\tau) G(x, t; l, \tau) d\tau. \quad (12)$$

В равенстве (12) правая часть является потенциалом простого слоя с ядром функции Грина $G(x, t; l, \tau)$. При $x = 0$, правая часть (12) непрерывная и ограниченная функция при $0 < t < T$:

$$\frac{\partial^2 g_4(0, t)}{\partial x^2} = \int_0^t \mu'(\tau) G(0, t; l, \tau) d\tau.$$

где

$$G(0, t; l, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \exp \left\{ -\frac{[(2n+1)l]^2}{4(t-\tau)} \right\}.$$

□

Далее, находим нагруженное слагаемое $u_{xx}(0, t)$.

Из доказанных утверждений следует, что равенство (8), можно дифференцировать по x дважды, затем полагая $x = 0$, получим

$$u_{xx}(0, t) = \int_0^t K_{xx}(0, t, \tau) u_{xx}(0, \tau) d\tau + g_{xx}(0, t). \quad (13)$$

Ядро и правая часть интегрального уравнения (13) являются непрерывными и ограниченными функциями.

Обращая равенство (13) как интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $u_{xx}(0, t)$, будем иметь

$$\begin{aligned} u_{xx}(0, t) = \int_0^t \mu(\tau) \left[\frac{\partial G(0, t; l, \tau)}{\partial \tau} + \int_{\tau}^t R(t, s) \frac{\partial G(0, \tau; l, s)}{\partial \tau} ds \right] d\tau + \\ + g_{xx}(0, t) + \int_0^t R(t, \tau) g_{xx}(0, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (14)$$

здесь $R(t, \tau)$ – резольвента ядра $K_{xx}(0, t, \tau)$, а $g_0(t) = g_{xx}(0, t)$.

Подставляя значение $u_{xx}(0, t)$ из (14) в формулу (7), после некоторых преобразований получим

$$u(x, t) = \int_0^t \mu(\tau) G_{\xi}(x, t; l, \tau) d\tau - \int_0^t k(x, t, \tau) \mu(\tau) d\tau + g_5(x, t), \quad (15)$$

где

$$k(x, t, \tau) = \int_{\tau}^t K(x, t, s) k_1(\tau, s) ds;$$

здесь

$$k_1(t, \tau) = \frac{\partial G(0, t; l, \tau)}{\partial \tau} + \int_{\tau}^t R(t, s) \frac{\partial G(0, \tau; l, s)}{\partial \tau} ds;$$

$g_5(x, t)$ – известная функция.

Разрешимость нелокальной задачи 1

Интегрируя (15) по x от 0 до l будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^l u(x, t) dx = \int_0^t \mu(\tau) \left(\int_0^l G_{\xi}(x, t; l, \tau) dx \right) d\tau - \\ - \int_0^t \left(\int_0^l k(x, t, \tau) dx \right) \mu(\tau) d\tau + \int_0^l g_5(x, t) dx, \end{aligned} \quad (16)$$

Заметим, что

$$\int_0^l dx \int_0^t \mu(\tau) G_\xi(x, t; l, \tau) d\tau = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t G(0, t; l, \tau) \mu(\tau) d\tau.$$

Тогда формула (16) примет вид

$$\begin{aligned} \int_0^l u(x, t) dx = & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t \mu(\tau) G(0, t; l, \tau) d\tau - \\ & - \int_0^t \left(\int_0^l k(x, t, \tau) dx \right) \mu(\tau) d\tau + \int_0^l g_5(x, t) dx. \end{aligned} \quad (17)$$

В формуле (15) положим $x = l$ и умножим обе части на $h(t, \tau)$, полученное при этом выражение проинтегрируем по τ в пределах от 0 до t и после ряда преобразований, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t h(t, \tau) u(l, \tau) d\tau = & \int_0^t \mu(\tau) \left\{ \int_\tau^t h(t, s) [G_\xi(l, s; l, \tau) - k(l, t, \tau)] ds \right\} d\tau + \\ & + \int_0^t h(t, \tau) g_5(l, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно условию (4), из равенств (17) и (18) для определения функции $\mu(t)$ получим следующее соотношение

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} + \int_0^t k_2(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = g_6(t), \quad (19)$$

здесь

$$\begin{aligned} k_2(t, \tau) = & G(0, t; l, \tau) + \int_0^l k(x, t, \tau) dx + \\ & + \int_\tau^t h(\tau, s) [G_\xi(l, s; l, \tau) + k(l, s, \tau)] ds; \\ g_6(t) = & \psi_2(t) - \int_0^l g_5(x, t) dx + \int_0^t h(t, \tau) g_5(l, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Последнее равенство перепишем в виде

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = g_6(t) - \int_0^t k_2(t, \tau) \mu(\tau) d\tau = g_7(t), \quad (20)$$

В силу условия согласования имеем, что $g_7(0) = 0$.

Обращая уравнение (20), как интегральное уравнение Абеля, получим

$$\mu(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t k_2(t, \tau) \mu(\tau) d\tau + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g'_7(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau, \quad (21)$$

здесь

$$k_2(t, \tau) = \frac{k_1(\tau, \tau)}{\sqrt{t-\tau}} + \int_{\tau}^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{\partial k_1(\tau, s)}{\partial \tau} ds.$$

В силу свойств функции Грина, легко показать [5], что

$$|k_2(t, \tau)| \leq \frac{c}{\sqrt{t-\tau}}; c = \text{const} > 0.$$

Уравнение (21) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, существование единственного решения которого можно найти методом последовательных приближений. Найденное значение $\mu(t)$ подставляя в формулу (15), получим регулярное решение нелокальной задачи 1.

Резюмируя полученные выше результаты, можно сформулировать следующую теорему:

Теорема. Если заданные функции удовлетворяют условия $f(x, t) \in C(\bar{D})$, $\varphi(x) \in C(0, l)$, $\psi_1(t) \in C(0, +\infty)$, $\mu(t) \in C^1(0, +\infty)$ и $\mu(0) = 0$, кроме того выполнены условия согласования

$$\varphi'(0) = \psi_1(0); \quad \int_0^l \varphi(x) dx = \psi_2(0).$$

Тогда существует единственное решение нелокальной задачи 1.

Таким образом, разрешимость нелокальной задачи (1)–(4) доказана.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

- [1] Аттаев А. Х., “О некоторых задачах для нагруженного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка”, *Вестник КРАУНЦ. Серия физико-математические науки*, 2016, № 4–1(16), 9–14. [Attaev A. H., “On some problems for loaded partial differential equation of the first order”, *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki*, 2016, № 4–1(16), 9–14 (in Russian)].
- [2] Аттаев А. Х., Искаков С. А., Каршигына Г. Ж., Рамазанов М. И., “Первая краевая задача для уравнения теплопроводности с нагрузкой дробного порядка I”, *Вестник КарГУ. Серия Математика*, 2014, № 4(16), 11–16. [Attaev A. H., Iskakov S. A., Karshigina G. J., Ramazanov M. I., “Pervaja kraevaja zadacha dlja uravnenija teploprovodnosti s nagruzkoj drobnogo porjadka I”, *Vestnik KarGU. Serija Matematika*, 2014, № 4(16), 11–16 (in Russian)].
- [3] Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н., *Сборник задач по математической физике*, Наука, М., 1989, 688 с. [Budak B. M., Samarskiy A. A., Tikhonov A. Y., *Sbornik zadach po matematicheskoy fiziki*, Nauka, M., 1989 (in Russian), 688 pp.]

- [4] Джениалиев М.Т., Рамазанов М.И., *Нагруженные уравнения — как возмущения дифференциальных уравнений*, Гылым, Алматы, 2010, 334 с. [Dzhenaliev M.T., Ramazanov M.I., *Nagruzhennye uravnenija — kak vozmushhenija differencial'nyh uravnenij*, Gylym, Almaty, 2010 (in Russian), 334 pp.]
- [5] Джураев Т.Д., *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, Фан, Ташкент, 1979, 240 с. [Dzhuraev T.D., *Kraevye zadachi dlja uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov*, Fan, Tashkent, 1979 (in Russian), 220 pp.]
- [6] Зикиров О.С., Холиков Д.К. Об одной задаче для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка, *Математические заметки СВФУ*, **23**:2 (2016), 19–30. [Zikirov O.S., Kholikov D.K., “On some problem for a loaded pseudoparabolic equation of the third order”, *Mathematical notes of NEFU*, **23**:2 (2016), 19–30 (in Russian)].
- [7] Кожанов А.И., “Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче”, *Математические заметки*, **76**:6 (2004), 840–853. [Kozhanov A.I., “A Nonlinear Loaded Parabolic Equation and a Related Inverse Problem”, *Matematicheskie zametki*, **76**:6 (2004), 840–853 (in Russian)].
- [8] Кожанов А.И., “Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **44**:4 (2004), 694–716. [Kozhanov A.I., “Nonlinear loaded equations and inverse problems”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **44**:4 (2004), 657–675 (in Russian)].
- [9] Нахушев А.М., *Нагруженные уравнения и их приложения*, Наука, М., 2012, 232 с. [Nahushev A.M., *Nagruzhennye uravnenija i ih prilozhenija*, Nauka, M., 2012 (in Russian), 232 pp.]
- [10] Орынбасаров М.О., “Решение смешанной задачи для уравнения третьего порядка составного типа в полуполосе”, *Изв. НАН РК. Серия физико-математическая*, 2009, № 1, 3–8. [Orynbasarov M.O., “Reshenie smeshannoij zadachi dlja uravnenija tret'ego porjadka sostavnogo tipa v polupolose”, *Izvestija NAN RK, Serija fiziko-matematicheskaja*, 2009, № 3–8 (in Russian)].
- [11] Трикоми Ф., *Лекции по уравнениям в частных производных*, ИЛ, М., 1957, 443 с. [Trikomi F., *Leksii po uravnenijam v chastnyx proizvodnyh*, IL, M., 1957 totalpages 443 (in Russian)].
- [12] Yesbayeva A.N., Yessenbayeva G.A., Ramazanov M.I., “Investigation of the model for the essentially loaded heat equation”, *Eurasian Physical Technical Journal*, **16**:1(31) (2019), 113–120.
- [13] Zikirov O.S., Kholikov D.K., “Solvability of a mixed problem with an integral condition for a third-order hyperbolic equation”, *Journal of Mathematical Sciences*, **245**:3 (2020), 323–331.

MSC 35K10, 35K20

Research Article

Nonlocal problem with the integral condition for a loaded heat equation

M. M. Sagdullayeva

National University of Uzbekistan after named Mirzo Ulugbek, Tashkent, Republic of Uzbekistan, 4, Universitetskaya str., Tashkent, 100174, Republic of Uzbekistan.

E-mail: sagdullayevmm@mail.ru

In this paper, we consider a non-local problem with the integral condition for the loaded heat equation, where the loaded term is a derivative of the second order from an unknown function at the origin. The existence and uniqueness of a regular solution is proven. Using the Green's functions and thermal potentials, the existence of a regular solution to this problem is proved. The proof is based on the reduction of the formulated problem to the second kind Volterra integral equation with a weak singularity. The solvability of the obtained Volterra integral equations implies the existence of a unique solution to the problem.

Key words: non-local problem, integral condition, loaded equation, thermal conductivity, Green's function.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-47-56

Original article submitted: 22.01.2021

Revision submitted: 01.04.2021

For citation. Sagdullayeva M. M. Nonlocal problem with the integral condition for a loaded heat equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **34**: 1, 47-56. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-47-56

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Acknowledgments. The authors are deeply grateful to the referee for a number of comments that contributed to the improvement of the article.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Sagdullayeva M. M., 2021

Funding. This work was supported by the Ministry of Innovative Development of the Republic of Uzbekistan, grant OT - F4 - (36 + 32).