УДК 517.956.6

Научная статья

Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами

К. Т. Каримов

Ферганский государственный университет, 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, 19
E-mail: karimovk80@mail.ru

В данной статье изучена задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в прямоугольном параллелепипеде. На основании свойства полноты систем собственных функций двух одномерных спектральных задач, доказана теорема единственности. Решение поставленной задачи построено в виде суммы двойного ряда Фурье-Бесселя.

Ключевые слова: задача Келдыша, уравнение смешанного типа, спектральный метод, сингулярный коэффициент, функция Бесселя

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-29-46

Поступила в редакцию: 20.01.2021

В окончательном варианте: 22.02.2021

Для цитирования. Каримов К. Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2021. Т. 34. № 1. С. 29-46. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-29-46

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Каримов К. Т., 2021

Введение. Постановка задачи

Известно, что на плоскости задача Дирихле для вырождающихся уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами эллиптического типа не всегда будет корректно поставленной. Для таких дифференциальных уравнений наряду с задачей Дирихле можно изучить другие задачи, которые зависят от диапазона изменения параметров уравнения. Например, М. В. Келдыш впервые показал [1], что постановка задачи Дирихле для вырождающегося эллиптического уравнения второго рода

$$u_{xx} + y^m u_{yy} + a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0 \quad (m > 0) \quad (1)$$

в области D , ограниченной отрезком AB оси x и простой гладкой кривой Γ с концами в точках A и B , лежащей в полуплоскости $y > 0$, зависит от m и поведения $b(x, y)$ при $y \rightarrow 0$. В одних случаях граничное условие можно задавать на всей границе области D , в других — на части границы, совпадающей с линией параболического вырождения, $u(x, y)$ освобождается от граничного условия, т.е. $u(x, y)$ надо задавать лишь на Γ . Это объясняется тем, что решение $u(x, y)$ уравнения (1) и его производная

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

u_y могут, вообще говоря, обращаться в бесконечность на линии параболического вырождения. Так, если решения уравнения (1) не все остаются ограниченными при $y \rightarrow 0$, то задача Дирихле, не имеет решения в области D . В этих случаях оказывается разрешимой следующая задача.

Задача Е. Найти в области D регулярное решение уравнения (1), остающееся ограниченным при $y \rightarrow 0$ и принимающее заданные непрерывные значения φ лишь на кривой Γ .

Опираясь на результаты, полученные в работе [1], С.П.Пулькиным [3] исследована задача с неполными граничными данными, т.е. следующая задача типа E :

Задача НЕ. Найти в области D_1 , ограниченной кривой Γ_1 , лежащей в первом квадранте, соединяющей точки $A(1,0)$, $B(0,b)$, и отрезками OB , OA регулярное решение уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sgny} \cdot u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0, \quad p \geq 1, \quad (2)$$

удовлетворяющее условиям $u|_{\Gamma_1} = \varphi(s)$ и $u_y|_{OA} = v(x)$, где $b = \operatorname{const} > 0$, $O(0,0)$.

Работа [3] является продолжением работы [3], где изучена задача типа E для уравнения (2) в области D_1 , в которой на линии сингулярности требуется ограниченность решения уравнения, а в остальной части границы задается третье граничное условие и условие Неймана.

Отметим также, что аналогичные задачи для эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами приведены в монографии [4].

Перечисленные выше задачи в настоящее время получили название «Задача Келдыша». Изучению их в смешанной области плоскости посвящены, например, работы [5] - [7] и др. Для трехмерного уравнения эллиптического и смешанного типа с сингулярными коэффициентами подобные задачи изучены в работах [8] - [13]. В данной работе будет поставлена и исследована задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в прямоугольном параллелепипеде. Пусть $\Omega = \{(x,y,z) : 0 < x < 1, -a < y < b, 0 < z < 1\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, причем $a > 0, b > 0$. В области Ω рассмотрим трехмерное уравнение с тремя сингулярными коэффициентами

$$u_{xx} + (\operatorname{sgny}) u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{|y|} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0, \quad (3)$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, причем $1/2 \leq \alpha, \gamma < \infty$, $|\beta| < 1/2$.

Уравнение (3) в области Ω принадлежит смешанному типу, а именно: в области $\Omega^+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ — эллиптическому типу, а в области $\Omega^- = \Omega \cap \{y < 0\}$ — гиперболическому типу. Плоскости $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостями сингулярности коэффициентов уравнения, а среди них $y = 0$ — есть плоскость изменения типа.

Задача Келдыша в ограниченных трехмерных областях формулируется следующим образом.

Задача Е. Найти ограниченную при $x \rightarrow 0, z \rightarrow 0$ функцию

$$u(x,y,z) \in C(\bar{\Omega} \setminus (xz = 0)) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-),$$

удовлетворяющую в области $\Omega^+ \cup \Omega^-$ уравнению (3) и краевым условиям

$$u(1,y,z) = 0, \quad y \in [-a,b], \quad z \in [0,1]; \quad (4)$$

$$u(x, y, 1) = 0, y \in [-a, b], x \in [0, 1]; \quad (5)$$

$$u(x, b, z) = f_1(x, z), x \in [0, 1], z \in [0, 1]; \quad (6)$$

$$u(x, -a, z) = f_2(x, z), x \in [0, 1], z \in [0, 1], \quad (7)$$

а также условию склеивания вида

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y, z), x \in [0, 1], z \in [0, 1]; \quad (8)$$

где $f_1(x, z), f_2(x, z)$ — заданные непрерывные функции.

Построение частных решений уравнения (1)

Для получения решения Задачи Е, формально применим метод Фурье [14]. Сначала найдем нетривиальные в $\bar{\Omega} \setminus (xz = 0)$ решения уравнения (3), ограниченные при $x \rightarrow 0, z \rightarrow 0$ и удовлетворяющие условиям (4), (5). Исследование этой задачи опирается на ниже доказываемую лемму.

Лемма 1. а) Если $\alpha \geq 1/2$, а функция $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega} \setminus (x = 0)) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ — есть ограниченное при $x \rightarrow 0$ решение уравнения (3), то $\lim_{x \rightarrow 0} [(\partial/\partial x)u(x, y, z)] = 0$.

б) Если $\gamma \geq 1/2$, а функция $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega} \setminus (z = 0)) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ — есть ограниченное при $z \rightarrow 0$ решение уравнения (1), то $\lim_{z \rightarrow 0} [(\partial/\partial z)u(x, y, z)] = 0$.

Доказательство. Разделив переменные по формуле $u(x, y, z) = W(x, z)Q(y)$, из уравнения (1), получим

$$(\operatorname{sgn} y) Q''(y) + \frac{2\beta}{|y|} Q'(y) - \lambda Q(y) = 0, y \in (-a, 0) \cup (0, b); \quad (9)$$

$$W_{xx} + W_{zz} + \frac{2\alpha}{x} W_x + \frac{2\gamma}{z} W_z + \lambda W = 0, x \in (0, 1), z \in (0, 1), \quad (10)$$

где $\lambda \in R$ — константа разделения.

Путем разделения переменных $W(x, z) = X(x)Z(z)$, уравнения (10) также распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X''(x) + \frac{2\alpha}{x} X'(x) + \mu X(x) = 0, x \in (0, 1); \quad (11)$$

$$Z''(z) + \frac{2\gamma}{z} Z'(z) + (\lambda - \mu) Z(z) = 0, z \in (0, 1), \quad (12)$$

где $\mu \in R$ — константа разделения.

В силу условия леммы 1, $u(x, y, z) = X(x)Q(y)Z(z)$ — ограниченная в $\bar{\Omega}$ функция. Из процесса получения уравнения (11) и (12) следует, что для доказательства леммы 1, достаточно показать, что функции $X(x)$ и $Z(z)$ при $x \rightarrow 0$ и $z \rightarrow 0$ ограничены и

$$\lim_{x \rightarrow 0} X'(x) = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} Z'(z) = 0. \quad (14)$$

Докажем это. Пусть $\mu > 0$. Найдем общее решение уравнения (11). Производя замену $X(x) = (t/\sqrt{\mu})^{1/2-\alpha} p(t)$, где $t = \sqrt{\mu}x$, из (11) получим уравнение Бесселя [15]:

$$t^2 p''(t) + t p'(t) + \{t^2 - [\alpha - (1/2)]^2\} p(t) = 0. \quad (15)$$

Принимая во внимание вид общего решения [15] уравнения (15) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (11) в виде

$$X(x) = d_1 x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sqrt{\mu}x) + d_2 x^{1/2-\alpha} Y_{\alpha-1/2}(\sqrt{\mu}x), \quad (16)$$

здесь d_1 и d_2 — произвольные постоянные, $J_l(x)$ и $Y_l(x)$ — функция Бесселя порядка l первого и второго рода [15] соответственно. В силу $\alpha \geq 1/2$, из (16) следует, что ограниченное при $x \rightarrow 0$ решение определяется равенством

$$X(x) = d_1 x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sqrt{\mu}x). \quad (17)$$

Вычисляя производную от функции (17) по формуле [15]

$$\frac{d}{dx} [x^{\pm\nu} J_\nu(x)] = \pm x^{\pm\nu} J_{\nu\mp 1}(x), \quad (18)$$

имеем $X'(x) = -\sqrt{\mu} x^{1/2-\alpha} J_{\alpha+1/2}(\sqrt{\mu}x)$. Отсюда следует, что $\lim_{x \rightarrow 0} X'(x) = 0$.

Пусть теперь $\mu = 0$. Тогда общее решение уравнения (11) при $\alpha > 1/2$ и $\alpha = 1/2$ соответственно имеет вид $X(x) = d_3 x^{1-2\alpha} + d_4$ и $X(x) = d_3 \ln x + d_4$, где d_3 и d_4 — произвольные постоянные. Из этих формул легко следует, что ограниченным при $x \rightarrow 0$ решением уравнения (11) является функция $X(x) = d_4$, откуда сразу следует, что $\lim_{x \rightarrow 0} X'(x) = 0$.

Предположим теперь $\mu < 0$. В уравнении (11) произведем замену

$$X(x) = (t/\sqrt{-\mu})^{1/2-\alpha} p(t), \text{ где } t = \sqrt{-\mu}x.$$

В результате получим уравнение Бесселя вида [15]

$$t^2 p''(t) + t p'(t) - [t^2 + (\alpha - 1/2)^2] p(t) = 0.$$

Принимая во внимание вид общего решения [15] этого уравнения и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (11) в виде

$$X(x) = d_5 x^{1/2-\alpha} I_{\alpha-1/2}(\sqrt{-\mu}x) + d_6 x^{1/2-\alpha} K_{\alpha-1/2}(\sqrt{-\mu}x),$$

здесь d_5 и d_6 — произвольные постоянные, $I_l(x)$ и $K_l(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда [15] соответственно. В силу $\alpha \geq 1/2$ из последнего равенства следует, что ограниченное при $x \rightarrow 0$ решение определяется равенством $X(x) = d_5 x^{1/2-\alpha} I_{\alpha-1/2}(\sqrt{-\mu}x)$. Из этого получим $X'(x) = d_5 \sqrt{-\mu} x^{1/2-\alpha} I_{\alpha+1/2}(\sqrt{-\mu}x)$. Отсюда легко следует, что $\lim_{x \rightarrow 0} X'(x) = 0$. Часть а) леммы 1 доказана.

Часть b) леммы 1 доказывается аналогично. По ходу её доказательства устанавливается, что ограниченные при $z \rightarrow 0$ решения уравнения (12) имеют вид

$$Z(z) = d_7 z^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda-\mu}z), \text{ при } \lambda > \mu, \quad (19)$$

$$Z(z) = d_8, \text{ при } \lambda = \mu, \quad Z(z) = d_9 z^{1/2-\gamma} I_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda-\mu}z), \text{ при } \lambda < \mu,$$

где $d_j, j = \overline{7,9}$ — произвольные постоянные. Лемма 1 полностью доказана. $\square$

Из однородных условий (4) и (5) для уравнений (11) и (12) вытекают условия

$$X(1) = 0, \quad (20)$$

$$Z(1) = 0. \quad (21)$$

Следовательно, для того, чтобы найти решения задачи (3)-(5), необходимо найти нетривиальные решения уравнения (9), (11) и (12), причем решения уравнений (11) и (12) должны удовлетворять условиям $\{|X(+0)| < +\infty, (18)\}$ и $\{|Z(+0)| < +\infty, (19)\}$, где $F(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} F(x)$. Из вида найденных выше ограниченных решений уравнений (11) и (12) легко следует, что при $\mu \leq 0$ и $\lambda \leq \mu$ нетривиальные решения уравнений (11) и (12), удовлетворяющие условиям соответственно (20) и (21) не существует. Поэтому воспользуемся решениями (17) и (19). Подставляя (17) и (19) соответственно в (20) и (21), имеем

$$J_{\alpha-1/2}(\sqrt{\mu}) = 0, \quad (22)$$

$$J_{\gamma-1/2}(\sqrt{\lambda-\mu}) = 0. \quad (23)$$

Известно, что при $l > -1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [15]. Так как $\alpha - 1/2 > -1$, то уравнения (22) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через σ_n — n -ый положительный корень уравнения (22), получим те значения параметра μ , при которых существуют нетривиальные решения задачи (т.е. собственные значения задачи) $\{(11), |X(+0)| < +\infty, (20)\}$: $\mu_n = \sigma_n^2, n \in N$.

Полагая в (17) $\mu = \mu_n$ и $d_1 = 1$, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи $\{(11), |X(+0)| < +\infty, (20)\}$:

$$\tilde{X}_n(x) = x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x), \quad n \in N. \quad (24)$$

Для удобства дальнейших вычислений данную систему функций нормируем:

$$X_n(x) = \tilde{X}_n(x) / \|\tilde{X}_n\|_{L_{2,\rho}(0,1)}, \quad (25)$$

$$\text{где } \|\tilde{X}_n\|_{L_{2,\rho}(0,1)} = \left(\int_0^1 \rho(x) \tilde{X}_n^2(x) dx \right)^{1/2} = |J_{1/2+\alpha}(\sigma_n)| / \sqrt{2}, \quad \rho(x) = x^{2\alpha}.$$

Согласно работе [15], система функций (25) ортогональна и полна в пространстве $L_2(0,1)$ с весом $x^{2\alpha}$.

Теперь исследуем задачи $\{(10), |Z(+0)| < +\infty, (19)\}$ при $\mu = \mu_n$. Обозначая через δ_{km} — m -ый положительный корень уравнения (23) при $n = k$, получим те значения

параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения задачи $\{(12), |Z(+0)| < +\infty, (21)\}$: $\lambda_{nm} = \sigma_n^2 + \delta_{nm}^2$, $n, m \in N$.

Полагая в (19) $\lambda = \lambda_{nm}$ и $d_7 = 1$, находим нетривиальные решения (собственные функции) задачи $\{(12), |Z(+0)| < +\infty, (21)\}$ в виде

$$\tilde{Z}_{nm}(z) = z^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\delta_{nm}z), \quad n, m \in N. \quad (26)$$

Отсюда, нормируя, получаем ортонормальную и полную в пространстве $L_2(0,1)$ с весом $z^{2\gamma}$ систему собственных функций:

$$Z_{nm}(z) = \tilde{Z}_{nm}(z) / \|\tilde{Z}_{nm}\|_{L_{2,q}(0,1)}, \quad (27)$$

где $\|\tilde{Z}_{nm}\|_{L_{2,q}(0,1)} = \left(\int_0^1 q(z) \tilde{Z}_{nm}^2(z) dz \right)^{1/2} = |J_{1/2+\gamma}(\delta_{nm})| / \sqrt{2}$, $q(z) = z^{2\gamma}$.

Отметим, что для собственных значений σ_n при достаточно больших n справедлива асимптотическая формула [16, с. 317] $\sigma_n = \pi n + \frac{1}{2}(\alpha - \frac{1}{2})\pi - \frac{1}{4}\pi + O(n^{-1}) = \pi n + \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + O(n^{-1})$. В этой формуле $O(n^{-1})$ [16, С.15] означает такую величину, отношение которой к n^{-1} при беспредельном возрастании n остается меньше некоторой постоянной. Для вычисления членов более высокого порядка положим $\sigma_n \approx \pi n$. Для собственных значений δ_{nm} и λ_{nm} (для каждого фиксированного $n \in N$) при достаточно больших m справедливы асимптотические формулы:

$$\delta_{nm} \approx \pi m, \quad \lambda_{nm} \approx (\pi m)^2. \quad (28)$$

Полагая в уравнение (9) $\lambda = \lambda_{nm}$, найдем общее решения этого уравнении при $y > 0$ и $y < 0$ для каждой пары (n, m) натуральных n и m :

$$Q_{nm}(y) = \begin{cases} a_{nm}y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y) + b_{nm}y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y), & y > 0, \\ (-y)^{1/2-\beta} [c_{nm}J_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{nm}}y) + d_{nm}Y_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{nm}}y)], & y < 0, \end{cases} \quad (29)$$

здесь a_{nm}, b_{nm}, c_{nm} и d_{nm} — произвольные постоянные.

Теперь в (29) на основании $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega} \setminus \{xz = 0\})$ и условия склеивания (8) подберем постоянные a_{nm}, b_{nm}, c_{nm} и d_{nm} так, чтобы выполнялись условия

$$Q_{nm}(+0) = Q_{nm}(-0), \quad \lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} Q'_{nm}(y) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} Q'_{nm}(y). \quad (30)$$

Из (29) следует, что первое из равенств (30) выполняется, если $d_{nm} = -\pi b_{nm}/2$ при любых a_{nm} и c_{nm} , а второе равенство имеет место при $c_{nm} = (\pi b_{nm}/2) \operatorname{ctg}(\pi/4 - \beta\pi/2) - a_{nm}$ и $d_{nm} = -\pi b_{nm}/2$. С учетом последних равенств, функции из (29) примут вид

$$Q_{nm}(y) = \begin{cases} a_{nm}y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y) + b_{nm}y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y), & y \geq 0; \\ (-y)^{1/2-\beta} [-a_{nm}J_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{nm}}y) + b_{nm}\bar{Y}_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{nm}}y)], & y \leq 0, \end{cases} \quad (31)$$

где $\bar{Y}_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{nm}}y) = [\pi/(2 \cos \beta\pi)] [J_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{nm}}y) + J_{\beta-1/2}(-\sqrt{\lambda_{nm}}y)]$.

Единственность решения

Теорема. Если существует решение $u(x, y, z)$ задачи E, то оно единственно тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{nm}(a, b) = I_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_{nm}} b \right) \bar{Y}_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_{nm}} a \right) + K_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_{nm}} b \right) J_{1/2-\beta} \left(\sqrt{\lambda_{nm}} a \right) \neq 0 \quad (32)$$

при всех $n, m \in N$.

Доказательство. Пусть $u(x, y, z)$ — решение задачи E. Следуя работе [10], рассмотрим следующую функцию:

$$\omega_{nm}(y) = \int_0^1 \int_0^1 u(x, y, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dx dz, \quad m, n \in N. \quad (33)$$

На основании (33), введем функции

$$\omega_{nm}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(y) = \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u(x, y, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dx dz, \quad n, m \in N, \quad (34)$$

где ε_1 и ε_2 — достаточно малые положительные числа. Очевидно, что $\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \omega_{nm}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(y) = \omega_{nm}(y)$.

Дифференцируем равенство (34) по y при $y > 0$ и $y < 0$:

$$\begin{aligned} [\omega_{nm}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(y)]' &= \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u_y x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dx dz, \\ [\omega_{nm}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(y)]'' &= \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u_{yy} x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dx dz, \quad n, m \in N. \end{aligned} \quad (35)$$

Учитывая уравнение (3), из (35), имеем

$$\begin{aligned} [\omega_{nm}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(y)]'' &= -(\operatorname{sgny}) \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} \left(u_{xx} + \frac{2\alpha}{x} u_x + u_{zz} + \frac{2\gamma}{z} u_z + \frac{2\beta}{|y|} u_y \right) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dx dz \\ &= -(\operatorname{sgny}) \left[\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} \left(\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u_{xx} x^{2\alpha} X_n(x) dx + \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \frac{2\alpha}{x} u_x x^{2\alpha} X_n(x) dx \right) z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \left(\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u_{zz} z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dz + \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} \frac{2\gamma}{z} u_z z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dz \right) x^{2\alpha} X_n(x) dz + \frac{2\beta}{|y|} [u_{nm}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(y)]' \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Преобразуем следующие интегралы:

$$\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u_{xx} x^{2\alpha} X_n(x) dx = u_x x^{2\alpha} X_n(x) \Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1} - u [x^{2\alpha} X_n(x)]' \Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u x^{2\alpha} \left[X_n''(x) + 2 \frac{2\alpha}{x} X_n'(x) + (4\alpha^2 - 2\alpha) x^{-2} X_n(x) \right] dx, \\
& \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \frac{2\alpha}{x} u x^{2\alpha} X_n(x) dx = 2\alpha x^{2\alpha-1} X_n(x) u \Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1} - \\
& - \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u x^{2\alpha} \left[\frac{2\alpha}{x} X_n'(x) + (4\alpha^2 - 2\alpha) x^{-2} X_n(x) \right] dx.
\end{aligned}$$

На основании полученных выше равенств, имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u_{xx} x^{2\alpha} X_n(x) dx + \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \frac{2\alpha}{x} u x^{2\alpha} X_n(x) dx = \\
& \{ [u_x X_n(x) - u X_n'(x)] x^{2\alpha} \} \Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1} - \sigma_n^2 \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u x^{2\alpha} X_n(x) dx.
\end{aligned} \quad (37)$$

Аналогично находим

$$\begin{aligned}
& \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u_{zz} z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dz + \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} \frac{2\gamma}{z} u z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dz = \\
& = \{ [u_z Z_{nm}(z) - u Z_{nm}'(z)] z^{2\gamma} \} \Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=1-\varepsilon_2} - \delta_{nm}^2 \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dz.
\end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя (37) и (38) в равенство (36), получим

$$\begin{aligned}
[u_{nm}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(y)]'' & = -(\operatorname{sgny}) \left[\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} \left([u_x X_n(x) - u X_n'(x)] x^{2\alpha} \Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1} - \sigma_n^2 \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u x^{2\alpha} X_n(x) dx \right) \times \right. \\
& \times z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dz + \int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} \left([u_z Z_{nm}(z) - u Z_{nm}'(z)] z^{2\gamma} \Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=1-\varepsilon_2} - \delta_{nm}^2 \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dz \right) \times \\
& \times x^{2\alpha} X_n(x) dx + \frac{2\beta}{|y|} [u_{nm}^{\varepsilon_1 \varepsilon_2}(y)]' \Big].
\end{aligned} \quad (39)$$

Теперь из (39), переходя к пределу при $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ и учитывая условия (4), (5), $|X_n(+0)| < +\infty$, $X_n(1) = 0$, $X_n'(1) = -\sqrt{2}\sigma_n$, $|Z_{nm}(+0)| < +\infty$, $Z_{nm}(1) = 0$, $Z_{nm}'(1) = -\sqrt{2}\delta_{nm}$ и условия леммы 1, получим, что, $\omega_{nm}(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $(\operatorname{sgny}) \omega_{nm}''(y) + \frac{2\beta}{|y|} \omega_{nm}'(y) - \lambda_{nm} \omega_{nm}(y) = 0$, $y \in (-a, 0) \cup (0, b)$, т.е. уравнения (9). Следовательно $\omega_{nm}(y) = Q_{nm}(y)$.

Теперь, учитывая условия (6) и (7), из (33) находим

$$\omega_{nm}(b) = \int_0^1 \int_0^1 f_1(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dx dz = f_{1nm}, \quad (40)$$

$$\omega_{nm}(-a) = \int_0^1 \int_0^1 f_2(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dx dz = f_{2nm}. \quad (41)$$

Учитывая равенство $\omega_{nm}(y) = Q_{nm}(y)$ и подставляя (31) в условия (40) и (41), получим

$$\begin{cases} a_{nm} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}b}) + b_{nm} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}b}) = f_{1nm} b^{\beta-1/2}, \\ -a_{nm} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}a}) + b_{nm} \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}a}) = f_{2nm} a^{\beta-1/2}. \end{cases} \quad (42)$$

Определителем системы (42) являются выражения $\Delta_{nm}(a, b)$, которое задается формулой (32). Если $\Delta_{nm}(a, b) \neq 0$, то система (42) имеет единственное решение

$$a_{nm} = \frac{f_{1nm} b^{\beta-1/2} \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}a}) - f_{2nm} a^{\beta-1/2} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}b})}{\Delta_{nm}(a, b)},$$

$$b_{nm} = \frac{f_{1nm} b^{\beta-1/2} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}a}) + f_{2nm} a^{\beta-1/2} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}b})}{\Delta_{nm}(a, b)}.$$

Принимая во внимание равенства (32), $\omega_{nm}(y) = Q_{nm}(y)$ и последнее равенство, окончательно находим

$$\omega_{nm}(y) = \begin{cases} \frac{f_{1nm}(y/b)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(a, y) + f_{2nm}(y/a)^{1/2-\beta} A_{nm}(y, b)}{\Delta_{nm}(a, b)}, & y \in [0; b], \\ \frac{f_{1nm}(-y/b)^{1/2-\beta} B_{nm}(a, -y) + f_{2nm}(-y/a)^{1/2-\beta} \Delta_{nm}(-y, b)}{\Delta_{nm}(a, b)}, & y \in [-a, 0]. \end{cases} \quad (43)$$

где

$$A_{nm}(y, b) = I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}b}) K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}y}) - K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}b}) I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}y}),$$

$$B_{nm}(a, -y) = J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}a}) \bar{Y}_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{nm}y}) - \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}a}) J_{1/2-\beta}(-\sqrt{\lambda_{nm}y}).$$

Пусть $f_j(x, z) \equiv 0$, $j = \overline{1, 2}$. Тогда из (40), (41) и (43) следует, что $\omega_{nm}(y) \equiv 0$ при всех $n, m \in N$ и из 33 имеем $\int_0^1 \int_0^1 x^{2\alpha} z^{2\gamma} u(x, y, z) X_n(x) Z_{nm}(z) dx dz = 0$, $m, n \in N$. Отсюда, в силу полноты (для каждого $n \in N$) системы функций (27) в пространстве $L_2(0, 1)$ с весом $z^{2\gamma}$, следует $\int_0^1 x^{2\alpha} z^{2\gamma} u(x, y, z) X_n(x) dx = 0$, $n \in N$. Если учесть полноту системы функций (25) в пространстве $L_2(0, 1)$ с весом $x^{2\alpha}$, то из последнего равенства вытекает, что $u(x, y, z) \equiv 0$ для всех $x \in [0, 1]$ и при любом $y \in [-a, b]$, $z \in [0, 1]$. Отсюда следует утверждения теоремы 1. Пусть при некоторых a, b и $n = l, m = k$, где $l, k \in N$, нарушено условие (32), т.е. $\Delta_{lk}(a, b) = 0$. Тогда однородная задача Е [т.е. при $f_j(x, z) \equiv 0$] имеет нетривиальное решение

$$u_{lk}(x, y, z) = \begin{cases} \Delta_{lk}(a, y) y^{2\beta} \tilde{X}_l(x) \tilde{Z}_{lk}(z), & y \in [0, b], \\ \Delta_{lk}(-y, b) (-y)^{2\beta} \tilde{X}_l(x) \tilde{Z}_{lk}(z), & y \in [-a, 0], \end{cases} \quad (44)$$

где $\tilde{X}_l(x)$ и $\tilde{Z}_{lk}(z)$ находится по формуле (24) и (26) соответственно. $\square$

Построение и обоснование решения задачи Е

Решение задачи Е при выполнении условий (30) будем искать формально в виде суммы двойного ряда Фурье-Бесселя:

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\tilde{X}_n(x)\tilde{Z}_{nm}(z)}{[J_{1/2+\alpha}(\sigma_n)J_{1/2+\gamma}(\delta_{nm})]^2} \begin{cases} \omega_{nm}^+(y), & y \geq 0 \\ \omega_{nm}^-(y), & y \leq 0 \end{cases}, \quad (45)$$

где $\omega_{nm}^+(y) = F_{1nm}P_{nm}^1(y) + F_{2nm}P_{nm}^2(y)$, $\omega_{nm}^-(y) = F_{2nm}P_{nm}^3(y) + F_{1nm}P_{nm}^4(y)$,

$$P_{nm}^1(y) = \frac{y^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(a, y)}{b^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(a, b)}, \quad P_{nm}^2(y) = \frac{y^{1/2-\beta}A_{nm}(y, b)}{a^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(a, b)}, \quad y \in [0, b],$$

$$P_{nm}^3(y) = \frac{(-y)^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(-y, b)}{a^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(a, b)}, \quad P_{nm}^4(y) = \frac{(-y)^{1/2-\beta}B_{nm}(a, -y)}{b^{1/2-\beta}\Delta_{nm}(a, b)}, \quad y \in [-a, 0],$$

а функции $\tilde{X}_n(x)$, $\tilde{Z}_{nm}(z)$ и коэффициенты F_{jnm} , $j = \overline{1, 2}$ определяются соответственно формулами (24), (26) и

$$F_{jnm} = \int_0^1 \int_0^1 f_j(x, z) x^{1/2+\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x) z^{1/2+\gamma} J_{\gamma-1/2}(\delta_{nm} z) dx dz, \quad j = \overline{1, 2}, \quad n, m \in N. \quad (46)$$

Каждый член ряда (45) удовлетворяет условиям (4)-(8). Для обоснования существования решения Задачи Е надо показать существование числа $a, b > 0$, при котором выражение $\Delta_{nm}(a, b)$ при достаточно больших m отделено от нуля с соответствующей асимптотикой.

Рассмотрим выражение

$$\Delta_{nm}(a, b) = I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b) \tilde{\Delta}_{nm}(a, b), \quad (47)$$

где $\tilde{\Delta}_{nm}(a, b) = [J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}a)K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b)]/I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b) + \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}a)$.

Известно [17, с.173], что функция $K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b)$ при достаточно больших n и m строго убывает по закону $(\sqrt{\lambda_{nm}})^{-1/2}e^{-\sqrt{\lambda_{nm}}}$, функция $I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b)$ строго возрастает по формуле $(\sqrt{\lambda_{nm}})^{-1/2}e^{\sqrt{\lambda_{nm}}}$, а функция $J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}a)$ — ограничена, поэтому величина $J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}a)K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b)/I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b)$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}a)$ при достаточно больших n и m . Поэтому рассмотрим только функцию

$$[(2\cos\beta\pi)/\pi]\bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}a) = J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}a) + J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}}a).$$

Эта функция имеет счетное множество нулей [15]. Следовательно, $\tilde{\Delta}_{nm}(a, b)$ при некоторых a может иметь счетное множество нулей независимо от $b > 0$. Поскольку a — положительное число, то оно может принимать значения, сколь угодно близкие к нулям $\tilde{\Delta}_{nm}(a, b)$. Поэтому, при каждом значении $n \in N$ и больших m выражение $(\lambda_{nm})^{1/4}\tilde{\Delta}_{nm}(a, b)$ может стать достаточно малым, т.е. возникает проблема «малых знаменателей» [20]. Чтобы исключить такую ситуацию, необходимо показать

существование $a > 0$ и $C_0 = \text{const} > 0$ таких, что при любом $b > 0$ и при каждом значении $n \in N$ и больших m справедлива оценка

$$|\sqrt{m}\tilde{\Delta}_{nm}(a, b)| \geq C_0 > 0. \quad (48)$$

При фиксированных $n \in N$ и достаточно больших m справедлива (28) и $\tilde{\Delta}_{nm}(a, b) \approx \tilde{\Delta}_m(a)$. На основании асимптотической формулы для функции $J_\nu(\xi)$ [17]

$$J_\nu(\xi) \approx \left(\frac{2}{\pi\xi}\right)^{1/2} \cos\left(\xi - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \xi \rightarrow \infty, \quad (49)$$

имеем

$$\sqrt{m}\tilde{\Delta}_m(a) = A \cos\left(\pi ma - \frac{\pi}{4}\right) = A \sin\left(\pi ma + \frac{\pi}{4}\right), \quad (50)$$

где $A = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Если, например, $a = p \in N$, то из (50) получаем

$$|\sqrt{m}\tilde{\Delta}_m(p)| = A \sin \frac{\pi}{4} = \frac{A}{\sqrt{2}} \geq C_0 > 0, C_0 = \text{const}.$$

Пусть теперь $a = i/j$ — дробное число, где $(i, j) = 1$, $(4, j) = 1$. Тогда

$$|\sqrt{m}\tilde{\Delta}_m(i/j)| = A \left| \sin \pi \left(\frac{mi}{j} + \frac{1}{4} \right) \right|. \quad (51)$$

Разделим mi на j с остатком: $mi = sj + r$, здесь $s, r \in N \cup \{0\}$, $0 \leq r < j$. Выражение (50) примет вид

$$|\sqrt{m}\tilde{\Delta}_m(i/j)| = A \left| \sin \pi \left(\frac{r}{j} + \frac{1}{4} \right) \right| \geq C_0 > 0.$$

Таким образом, доказана

Лемма 2. Если выполнено одно из условий: 1) a — любое натуральное число; 2) $a = i/j$ — любое дробное число, где $(i, j) = 1$, $(4, j) = 1$, то при больших m справедлива оценка (48).

Теперь докажем, что ряды из (45) и ряды $(u_{xx} + (2\alpha/x)u_x)$, $(u_{yy} + (2\beta/y)u_y)$, $(u_{zz} + (2\gamma/z)u_z)$, полученные из него дифференцированием, сходятся абсолютно и равномерно в области их рассмотрения, тогда его сумма будет решением задачи Е. При этом нам понадобятся ниже доказуемые леммы.

Лемма 3. Для достаточно больших натуральных n и m справедливы следующие оценки:

$$J_{1/2+\alpha}^2(\sigma_n) \geq \frac{C_1}{\sigma_n}, \quad J_{1/2+\gamma}^2(\delta_{nm}) \geq \frac{C_2}{\delta_{nm}}, \quad (52)$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. Так как σ_n ($n \in N$) есть нули функции $J_{\alpha-1/2}(x)$, то справедливо равенство $\int_0^1 x J_{\alpha-1/2}^2(\sigma_n x) dx = J_{1/2+\alpha}^2(\sigma_n)/2$. Из этого равенства следует, что

$$J_{1/2+\alpha}^2(\sigma_n) = 2 \int_0^1 x J_{\alpha-1/2}^2(\sigma_n x) dx = \frac{2}{\sigma_n^2} \int_0^{\sigma_n} \xi J_{\alpha-1/2}^2(\xi) d\xi. \quad (53)$$

В силу асимптотической формулы (49), существуют некоторые достаточно большое число $C_3 > 0$ такое, что $\xi > C_3 > 0$, справедливо равенство

$$\xi J_{\alpha-1/2}^2(\xi) \approx (2/\pi) \sin^2(\xi - (\alpha\pi)/2).$$

Тогда, если предположить, что σ_n — достаточно большое число и $\sigma_n > 2(C_3 + 1)$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\sigma_n} \xi J_{\alpha-1/2}^2(\xi) d\xi &> \int_{C_3}^{\sigma_n} \xi J_{\alpha-1/2}^2(\xi) d\xi \geq \frac{2}{\pi} \int_{C_3}^{\sigma_n} \sin^2\left(\xi - \frac{\alpha\pi}{2}\right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \sigma_n - \frac{1}{\pi} [C_3 + \cos(\sigma_n + C_3 - \alpha\pi) \sin(\sigma_n - C_3)] \geq \frac{1}{2\pi} \sigma_n. \end{aligned}$$

Если учесть это, то из (53) следует первая оценка из (52). Аналогично доказывается вторая оценка из (52). Лемма 3 доказана. $\square$

Лемма 4. Для всех $x \in [0, 1]$ и при достаточно больших n справедливы следующие оценки:

$$|\tilde{X}_n(x)| \leq C_4, \quad (54)$$

$$\left| x^{-2\alpha} [x^{2\alpha} \tilde{X}'_n(x)]' \right| \leq C_4 (\sigma_n/a)^2, \quad (55)$$

где C_4 — некоторое положительное постоянное.

Доказательство. Очевидно, что $\tilde{X}_n(x) \in C[0, 1]$ и для достаточно больших n справедлива асимптотическая формула (49). Поэтому справедлива оценка (54).

Используя формулу (18), из (24) найдем $x^{2\alpha} \tilde{X}'_n(x) = -\sigma_n x^{1/2+\alpha} J_{1/2+\alpha}(\sigma_n x)$. Вычислим производную первого порядка этой функции по формуле (16). Затем, умножая её на $x^{-2\alpha}$, получим $x^{-2\alpha} [x^{2\alpha} \tilde{X}'_n(x)]' = -\sigma_n^2 x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x) = -\sigma_n^2 \tilde{X}_n(x)$. Отсюда, в силу (54), следует справедливость оценки (55). $\square$ Аналогично доказывается следующая

Лемма 5. Для всех $z \in [0, 1]$ и натуральных n при достаточно больших t справедливы следующие оценки:

$$|\tilde{Z}_{nm}(z)| \leq C_5, \quad (56)$$

$$\left| z^{-2\gamma} [z^{2\gamma} \tilde{Z}'_{nm}(z)]' \right| \leq C_5 \delta_{nm}^2, \quad (57)$$

где C_5 — некоторое положительное постоянное.

Лемма 6. Пусть a удовлетворяет условиям леммы 2. Тогда для достаточно больших t (при каждом $n \in N$) справедливы оценки

$$|P_{nm}^j(y)| \leq C_6, y \in [0, b], j = \overline{1, 2}, \quad (58)$$

$$\left| y^{-2\beta} \frac{d}{dy} \left[y^{2\beta} \frac{d}{dy} P_{nm}^j(y) \right] \right| \leq \lambda_{nm} C_6, y \in (0, b), j = \overline{1, 2}, \quad (59)$$

$$|P_{nm}^j(y)| \leq C_7, y \in [-a, 0], j = \overline{3, 4}, \quad (60)$$

$$\left| y^{-2\beta} \frac{d}{dy} \left[y^{2\beta} \frac{d}{dy} P_{nm}^j(y) \right] \right| \leq \lambda_{nm} C_7, y \in (-a, 0), j = \overline{3, 4}, \quad (61)$$

где C_6, C_7 — произвольные постоянные.

Рассмотрим функцию $P_{nm}^1(y)$ и из (32) и (47), получим

$$|P_{nm}^1(y)| \leq \left| \frac{y^{1/2-\beta} K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y) \sqrt{m} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}a)}{b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b) \sqrt{m} \tilde{\Delta}_{nm}(a,b)} \right| + \\ + \left| \frac{y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y) \sqrt{m} \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}a)}{b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b) \sqrt{m} \tilde{\Delta}_{nm}(a,b)} \right|.$$

Отсюда при $y \in [0, b]$ и при каждом значении $n \in N$ и достаточно больших m с учетом леммы 2, а также формулам $y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}y) / [b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b)] < 1$, (49) и асимптотической формулы [17]

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}}, \quad K_\nu(z) \approx \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (62)$$

будем иметь $|P_{nm}^1(y)| \leq \frac{\tilde{C}_1}{C_0 e^{\pi m(y+b)}} + \frac{\tilde{C}_2}{C_0} \leq C_1$, здесь $\tilde{C}_j, j = \overline{1, 2}$ — положительные постоянные.

Непосредственная проверка показывает, что функция $P_{nm}^1(y)$ при $y \in (0, b)$ удовлетворяет уравнению (9). Тогда можно переписать

$$y^{-2\beta} \frac{d}{dy} \left[y^{2\beta} \frac{d}{dy} P_{nm}^1(y) \right] = \lambda_{nm} P_{nm}^1(y).$$

Отсюда, в силу (58) при $j = 1$, следует справедливость оценки (59) при $j = 1$.

Аналогично, доказываются оценки (58) и (59) при $j = 2$.

Теперь рассмотрим функцию $P_{nm}^3(y)$ и с учетом (32) и (47) имеем

$$|P_{nm}^3(y)| \leq \left| \frac{\sqrt{m}(-y)^{1/2-\beta} \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y))}{b^{1/2-\beta} \sqrt{m} \tilde{\Delta}_{nm}(a,b)} \right| + \\ + \left| \frac{\sqrt{m}(-y)^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)) K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b)}{b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b) \sqrt{m} \tilde{\Delta}_{nm}(a,b)} \right|.$$

Отсюда при $y \in [-a, 0]$ и при каждом значении $n \in N$ и достаточно больших m с учетом леммы 2, а также формулам (49) и (62) будем иметь $|P_{nm}^3(y)| \leq \frac{\tilde{C}_3}{C_0} + \frac{\tilde{C}_4}{C_0 e^{2\pi mb}} \leq C_2$, здесь $\tilde{C}_j, j = \overline{3, 4}$ — положительные постоянные.

Здесь, также непосредственной проверкой можно показать, что функция $P_{nm}^3(y)$ при $y \in (-a, 0)$ удовлетворяет уравнению (9). Тогда, можно переписать

$$y^{-2\beta} \frac{d}{dy} \left[y^{2\beta} \frac{d}{dy} P_{nm}^3(y) \right] = \lambda_{nm} P_{nm}^3(y).$$

Отсюда, в силу (60) при $j = 1$, следует справедливость оценки (61) при $j = 1$.

Аналогично, доказываются оценки (60) и (61) при $j = 2$.

Лемма 7. Пусть выполнены следующие условия:

$$|f_j(0, z)| < +\infty, \quad f_j(1, z) = 0, \quad |f_j(x, 0)| < +\infty, \quad f_j(x, 1) = 0, \quad j = \overline{1, 2}, \quad (63)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{jxz}(x, z)] \in C([0, 1] \times [0, 1]), \quad j = \overline{1, 2}, \quad (64)$$

$$|\tilde{f}_j(0, z)| < +\infty, \quad \tilde{f}_j(1, z) = 0, \quad |\tilde{f}_j(x, 0)| < +\infty, \quad \tilde{f}_j(x, 1) = 0, \quad j = \overline{1, 2}, \quad (65)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [x^{2\alpha} z^{2\gamma} \tilde{f}_{jxz}(x, z)] \in C([0, 1] \times [0, 1]), \quad j = \overline{1, 2}, \quad (66)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| x^{-1/2-\alpha} z^{-1/2-\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [x^{2\alpha} z^{2\gamma} \tilde{f}_{jxz}(x, z)] \right| dx dz < +\infty, \quad j = \overline{1, 2}. \quad (67)$$

где $\tilde{f}(x, z) = x^{-2\alpha} z^{-2\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [x^{2\alpha} z^{2\gamma} f_{jxz}(x, z)]$.

Тогда для любого фиксированного n при больших t справедлива оценка

$$|F_{jnm}| \leq \frac{C_8}{\sigma_n^{4+\varepsilon_3} \delta_{nm}^{4+\varepsilon_4}}, \quad (68)$$

где $\varepsilon_3, \varepsilon_4, C_8$ — некоторые положительные постоянные.

Доказательство. На основании формул (16) коэффициенты F_{jnm} , которые задаются формулой (46), представимы в виде

$$F_{jnm} = \frac{1}{\sigma_n \delta_{nm}} \int_0^1 \int_0^1 f_j(x, z) \frac{d}{dx} \left[x^{1/2+\alpha} J_{1/2+\alpha} \left(\frac{\sigma_n x}{a} \right) \right] \frac{d}{dz} \left[z^{1/2+\gamma} J_{1/2+\gamma} \left(\frac{\delta_{nm} z}{c} \right) \right] dx dz.$$

Отсюда, применяя правило интегрирования по частям четыре раза и принимая во внимание условия (63)-(66), получим

$$F_{jnm} = \frac{1}{\sigma_n^4 \delta_{nm}^4} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} [x^{2\alpha} z^{2\gamma} \tilde{f}_{jxz}(x, z)] x^{1/2+\alpha} J_{\alpha-1/2} \left(\frac{\sigma_n x}{a} \right) z^{1/2+\gamma} J_{\gamma-1/2} \left(\frac{\delta_{nm} z}{c} \right) dx dz. \quad (69)$$

Известно [18], что если $f(x)$ — абсолютно интегрируемая функция на $[0, l]$, то справедливо равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^l x f(x) J_p(\lambda_k x) dx = 0, \quad (70)$$

здесь λ_k ($k \in N$) — занумерованные в порядке возрастания положительные нули функции $J_p(x)$ ($p > -1$).

Так как выполнено условие (67), то, в силу (70), имеет место равенство

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [x^{2\alpha} z^{2\gamma} \tilde{f}_{jxz}(x, z)] x^{1/2+\alpha} J_{\alpha-1/2} \left(\frac{\sigma_n x}{a} \right) z^{1/2+\gamma} J_{\gamma-1/2} \left(\frac{\delta_{nm} z}{c} \right) dx dz = 0.$$

В силу последнего, из (69) при достаточно больших n и m , следует оценка (68). Лемма 6 доказана. $\square$

Согласно работе [18, с. 276, формула (4.3)] для достаточно больших n справедливо неравенство

$$1/\sigma_n \leq 2/n. \quad (71)$$

Аналогично, для $\forall n \in N$ при достаточно больших натуральных m справедливо неравенство

$$1/\delta_{nm} \leq 2/m. \quad (72)$$

Теперь переходим к исследованию сходимости рядов. Из (45) почленным дифференцированием формально составим ряды:

$$u_{xx} + \frac{2\alpha}{x}u_x = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4x^{-2\alpha} [x^{2\alpha} \tilde{X}'_n(x)]' \tilde{Z}_{nm}(z)}{[J_{1/2+\alpha}(\sigma_n) J_{1/2+\gamma}(\delta_{nm})]^2} \left\{ \begin{array}{l} \omega_{nm}^+(y), y \geq 0 \\ \omega_{nm}^-(y), y \leq 0 \end{array} \right\}, \quad (73)$$

$$(\text{sgny})u_{yy} + \frac{2\beta}{|y|}u_y = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\tilde{X}_n(x) \tilde{Z}_{nm}(z)}{[J_{1/2+\alpha}(\sigma_n) J_{1/2+\gamma}(\delta_{nm})]^2} \left\{ \begin{array}{l} y^{-2\beta} [y^{2\beta} (\omega_{nm}^+(y))']', y \geq 0 \\ y^{-2\beta} [y^{2\beta} (\omega_{nm}^-(y))']', y \leq 0 \end{array} \right\}, \quad (74)$$

$$u_{zz} + \frac{2\gamma}{z}u_z = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\tilde{X}_n(x) z^{-2\gamma} [z^{2\gamma} \tilde{Z}'_{nm}(z)]'}{[J_{1/2+\alpha}(\sigma_n) J_{1/2+\gamma}(\delta_{nm})]^2} \left\{ \begin{array}{l} \omega_{nm}^+(y), y \geq 0 \\ \omega_{nm}^-(y), y \leq 0 \end{array} \right\}, \quad (75)$$

В силу оценок (52), (54), (56), (58), (60), (68) и (72), ряд (45) при любом $(x, y, z) \in \bar{\Omega}$ и достаточно больших n, m мажорируется числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_9}{n^{3+\varepsilon_3} m^{3+\varepsilon_4}},$$

а ряды (73)-(75) соответственно в силу оценок $\{(52), (55), (56), (58), (60), (68), (71), (72)\}$, $\{(52), (54), (56), (59), (61), (68), (71), (72)\}$, $\{(52), (54), (57), (58), (60), (68), (71), (72)\}$ при любом (x, y, z) на каждом компакте $K \subset \Omega^+ \cup \Omega^-$ — мажорируются соответственно числовыми рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10}}{n^{1+\varepsilon_3} m^{3+\varepsilon_4}}, \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{11} \left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon_3} m^{3+\varepsilon_4}} + \frac{1}{n^{3+\varepsilon_3} m^{1+\varepsilon_4}} \right), \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{12}}{n^{3+\varepsilon_3} m^{1+\varepsilon_4}}, \quad (76)$$

где $C_j, j = \overline{9, 12}$ — некоторые положительные постоянные.

Нетрудно убедиться, что числовые ряды (76) сходятся. Тогда, согласно признаку Вейерштрасса [19, с. 427], абсолютно и равномерно сходится ряд (45) в $\bar{\Omega}$, а ряды (73)-(75) на каждом компакте $K \subset \Omega^+ \cup \Omega^-$. Поэтому функция $u(x, y, z)$, определенная рядом (45), удовлетворяет всем условиям задачи Е.

Если для указанных в Лемме 2 значений a при некоторых $n = s_1, s_2, \dots, s_j$ и $m = t_1, t_2, \dots, t_i$, где $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_j < n_0$, $1 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_i < m_0$, s_j, t_i, j и i — заданные натуральные числа, $\Delta_{nm}(a, b) = 0$, то для разрешимости системы (42) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$\int_0^1 \int_0^1 f_j(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_{nm}(z) dx dz = 0, \quad j = \overline{1, 2}. \quad (77)$$

В этом случае решение задачи E определяется в виде суммы ряда

$$u(x, y, z) = \left[\sum_{n=1}^{s_1-1} \left(\sum_{m=1}^{t_1-1} + \sum_{m=t_1+1}^{t_2-1} + \dots + \sum_{m=t_i+1}^{\infty} \right) + \sum_{n=s_1+1}^{s_2-1} \left(\sum_{m=1}^{t_1-1} + \sum_{m=t_1+1}^{t_2-1} + \dots + \sum_{m=t_i+1}^{\infty} \right) + \dots + \sum_{n=s_j+1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{t_1-1} + \sum_{m=t_1+1}^{t_2-1} + \dots + \sum_{m=t_i+1}^{\infty} \right) \right] \omega_{nm}(y) X_n(x) Z_{nm}(z) + \sum_l \sum_k C_{lk} u_{lk}(x, y, z). \quad (78)$$

Здесь, в последней сумме l принимает значения $s_1, s_2, \dots, s_j$, а k принимает значения $t_1, t_2, \dots, t_i$, C_{lk} — произвольные постоянные, $u_{lk}(x, y, z)$ — определяется по формуле (44).

Таким образом, доказана

Теорема. Пусть функция $f_j(x, z)$, $j = \overline{1, 2}$ удовлетворяет условиям (61)-(65) и выполнена оценка (46). Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\Delta_{nm}(b) \neq 0$ при всех n и m , то существует единственное решение задачи E, и это решение определяется рядом (45);

2) если $\Delta_{nm}(b) = 0$ при некоторых $n = s_1, s_2, \dots, s_j$, $m = t_1, t_2, \dots, t_i$, то задача E разрешима только тогда, когда выполняются условия ортогональности (77) и решение в этом случае определяется рядом (78).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

- [1] Келдыш М. В., "О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области", *ДАН СССР*, **77:2** (1951), 181–183. [Keldysh M. V., "O nekotorykh sluchayakh vyrozhdeniya uravneniy ellipticheskogo tipa na granitse oblasti", *DAN SSSR*, **77:2** (1951), 181–183].
- [2] Пулькин С. П., "О единственности решения сингулярной задачи Геллерстедта", *Изв. вузов. Сер.: Математика*, **19:6** (1960), 214–225. [Pul'kin S. P., "O yedinstvennosti resheniya singulyarnoy zadachi Gellersteda", *Izv. vuzov. Ser.: Matematika*, **19:6** (1960), 214–225].
- [3] Вострова Л. Е., Пулькин С. П., "Сингулярная задача с нормальной производной", *Волжский математический сборник*, 1966, № 5, 49–57. [Vostrova L. Ye., Pul'kin S. P., "Singulyarnaya zadacha s normal'noy proizvodnoy", *Volzhskiy matematicheskiy sbornik*, 1966, № 5, 49–57].
- [4] Сабитов К. Б., *К теории уравнений смешанного типа*, Физматлит, Москва, 2014, 304 с. [Sabitov K. B., *K teorii uravneniy smeshannogo tipa*, Fizmatlit, Moskva, 2014, 304 pp.]
- [5] Safina R. M., "Keldysh problem for a mixed-type equation of the second kind with the Bessel operator", *Differential Equations*, **51:10** (2015), 1347–1359.
- [6] Safina R. M., "Keldysh problem for mixed type equation with strong characteristic degeneration and singular coefficient", *Russian Mathematics*, **61:8** (2017), 46–54.
- [7] Zaitseva N. V., "Keldysh type problem for B-hyperbolic equation with integral boundary value condition of the first kind", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **38:1** (2017), 162–169.
- [8] Karimov K. T., "Keldysh problem for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **30:1** (2020), 31–48.

- [9] Urinov A. K., Karimov K. T., "The unique solvability of boundary value problems for a 3D elliptic equation with three singular coefficients", *Russian Mathematics*, **63**:2 (2019), 62–73.
- [10] Уринов А. К., Каримов К. Т., "Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки*, **21**:4 (2017), 665–683. [Urinov A. K., Karimov K. T., "Zadacha Dirikhle dlya trekhmernogo uravneniya smeshannogo tipa s tremya singulyarnymi koefitsiyentami", *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiz.-mat. nauki*, **21**:4 (2017), 665–683].
- [11] Каримов К. Т., "Задача типа Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде", *Бюллетень Института математики*, 2020, № 2, 68–82. [Karimov K. T., "Zadacha tipa Dirikhle dlya trekhmernogo uravneniya smeshannogo tipa s tremya singulyarnymi koefitsiyentami v polubeskonechnom parallelepipedе", *Byulleten' Instituta matematiki*, 2020, № 2, 68–82].
- [12] Urinov A. K., Karimov K. T., "The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-Cylindrical Domain", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **41**:9 (2020), 1898–1909.
- [13] Уринов А. К., Каримов К. Т., "Задача Дирихле для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами", *Итоги науки и техн. сер. соврем. мат. и ее прил. темат. обз.*, **156** (2018), 30–40. [Urinov A. K., Karimov K. T., "Zadacha Dirikhle dlya ellipticheskogo uravneniya s tremya singulyarnymi koefitsiyentami", *Itogi nauki i tekhn. ser. sovrem. mat. i yeye pril. temat. obz.*, **156** (2018), 30–40].
- [14] Тихонов А. Н., Самарский А. А., *Уравнения математической физики*. Т. 2-33, Наука, Москва, 1972, 810 с. [Tikhonov A. N., Samarskiy A. A., *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. V. 2-33, Nauka, Moskva, 1972, 810 pp.]
- [15] Ватсон Г. Н., *Теория бесселевых функций*, Изд. ИЛ, Москва, 1949, 798 с. [Watson G. N., *Teoriya besselevykh funktsiy*, Izd. IL, Moskva, 1949, 798 pp.]
- [16] Олвер Ф., *Введение в асимптотические методы и специальные функции*, Мир, Москва, 1986, 381 с. [Olver F., *Vvedeniye v asimptoticheskiye metody i spetsial'nyye funktsii*, Mir, Moskva, 1986, 381 pp.]
- [17] Лебедев Н. Н., *Специальные функции и их приложения*, Физматлит, Москва, 1963, 358 с. [Lebedev N. N., *Spetsial'nyye funktsii i ikh prilozheniya*, Fizmatlit, Moskva, 1963, 358 pp.]
- [18] Толстов Г. П., *Ряды Фурье*, Наука, Москва, 1980, 384 с. [Tolstov G. P., *Ryady Fur'ye*, Nauka, Moskva, 1980, 384 pp.]
- [19] Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 2, Физматлит, Москва, 2001, 800 с. [Fikhtengol'ts G. M., *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya*. V. 2, Fizmatlit, Moskva, 2001, 800 pp.]
- [20] Арнольд В. И., "Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике", *УМН*, **18**:6 (1963), 91–192. [Arnol'd V. I., "Malyye znamenateli i problemy ustoychivosti dvizheniya v klassicheskoy i nebesnoy mekhanike", *UMN*, **18**:6 (1963), 91–192].

MSC 35M12

Research Article

The Keldysh problem for a mixed-type three-dimensional equation with three singular coefficients

K. T. Karimov

Fergana State University, 150100, Fergana,
Murabbiilar st., 19, Uzbekistan
E-mail: karimovk80@mail.ru

In this article, we study the Keldysh problem for a three-dimensional mixed-type equation with three singular coefficients in a rectangular parallelepiped. Based on the completeness property of systems of eigenfunctions of two one-dimensional spectral problems, a uniqueness theorem is proved. The solution to the problem posed is constructed as the sum of a double Fourier-Bessel series.

Key words: Keldysh problem, mixed type equation, spectral method, singular coefficient, Bessel function.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-29-46

Original article submitted: 20.01.2021

Revision submitted: 22.02.2021

For citation. Karimov K. T. The Keldysh problem for a mixed-type three-dimensional equation with three singular coefficients. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **34**: 1, 29-46. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-29-46

Competing interests. The author declares that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Karimov K. T., 2021

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.