МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

Научная статья

Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка

Б. С. Аблабеков, А. К. Жороев

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, 720033,
г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547, Кыргызстан

E-mail: ablabekov_63@mail.ru, joroev1962@mail.ru

В работе рассматривается обратная задача для гиперболического уравнения третьего порядка. Ставится обратная задача, состоящая в определении неизвестного коэффициента, зависящего от времени. В качестве дополнительной информации для решения обратной задачи задаются значения решения задачи во внутренней точке. Доказывается теорема существования и единственности решения обратной задачи. Доказательство основано на выводе нелинейной системы интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода и доказательстве его разрешимости.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, обратная коэффициентная задача, единственность, существование, уравнение Вольтерра

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-9-18

Поступила в редакцию: 28.01.2021

В окончательном варианте: 03.03.2021

Для цитирования. Аблабеков Б. С., Жороев А. К. Об определении зависящего от времени младшего коэффициента в гиперболическом уравнении третьего порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2021. Т. 34. № 1. С. 9-18. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-9-18

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Аблабеков Б. С., Жороев А. К., 2021

Введение

Многие задачи, связанные с моделированием процессов фильтрации жидкости в трещиновато-пористых средах [1], процесс влагопереноса в почво-грунтах [2], передачи тепла в гетерогенной среде [3], распространение акустических волн в одномерной изотропной однородной среде с дисперсией и поглощением [4], процесс распространения возмущений в упругой среде [5], приводятся к изучению обратных задач для уравнений в частных производных третьего порядка. Под обратными задачами для дифференциальных уравнений понимают задачи нахождения коэффициентов, правых частей, а также начальных или граничных условий и решений дифференциальных уравнений по заданной дополнительной информации

Финансирование. Исследование выполнялось без финансовой поддержки фондов.

(переопределении) о решении прямой задачи. Как правило, исследования обратных задач для дифференциальных уравнений состоит из двух этапов. В первом этапе проводится исследование свойства решений прямой задачи, а на втором этапе исследуется сама обратная задача, включающее доказательство теорем существования, единственности и условной устойчивости решения обратной задачи в соответствующих функциональных пространствах.

Обратные задачи для гиперболических уравнений третьего порядка – сравнительно молодое направление в теории обратных задач. Вопросы разрешимости различных обратных задач для гиперболических, псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений третьего порядка изучались в работах [6]-[8]. В работе [6] построено решение задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка. Получено явное решение, аналогичное формуле Даламбера.

В [9, 10] изучены локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболического уравнения третьего порядка. Вопросы корректности обратных задач для гиперболических уравнений второго порядка исследовались в работах [11]-[13], (см. также библиографию в [12]). Обратные задачи определения неизвестного источника для полулинейного волнового уравнения, где дополнительная информация задается на некоторой кривой рассмотрены в работе [11].

В данной работе исследована коэффициентная обратная задача для гиперболического уравнения третьего порядка в случае задачи Коши с неизвестным коэффициентом при младшем члене.

Постановка задачи и основные результаты

Прямая задача. Рассмотрим задачу Коши для функции $u(x, t)$

$$L_q u = f(x, t), (x, t) \in D_T = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}; \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), u_{tt}(x, 0) = u_2(x), x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

где

$$L_q u = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + q(t)u.$$

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x, t)$ по известным функциям $q(t)$, $f(x, t)$ и $u_i(x)$, $i = 0, 1, 2$.

Обратная задача. Найти функцию $q(t) \in C[0, t_0]$ если о решении прямой задачи (1), (2) известна дополнительная информация

$$u(0, t) = h(t), 0 \leq t \leq t_0. \quad (3)$$

Другими словами, требуется по известным функциям $f(x, t)$, $u_i(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$ найти пару функций $\{u(x, t), q(t)\}$ удовлетворяющих (1)-(4).

Пусть $\Delta_1(x, t) = \{(s, \tau) : 0 \leq \tau \leq t, x - t - \tau \leq s \leq x + t - \tau\}$

Сформулируем теорему о существовании и единственности решения задачи (1), (2).

Теорема 1. Если для какого - либо $t_0 > 0, x_0 \in \mathbb{R}$, функции $q(t) \in C[0, t_0], u_i(x) \in C^{3-i}([x_0 - t_0, x_0 + t_0]), i = 0, 1, 2, f \in C^1(\Delta_1(x_0, t_0))$, то в области $\Delta_1(x_0, t_0)$ существует

единственная функция $u(x, t)$ такая, что $u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_{ttt}, u_{xxx}, u_{txx}, u_{ttx} \in C(\Delta_1(x_0, t_0))$ и удовлетворяет задаче (1), (2).

Доказательство. Пусть $v(x, t)$ есть решение задачи (1), (2), при $q(t) = 0$ и это решение определяется формулой [6]:

$$v(x, t) = \frac{1}{4}u_0(x+t) + \frac{3}{4}u_0(x-t) + \frac{t}{2}u_0(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(s)ds + \\ + \frac{1}{4} \int_{x-t}^{x+t} (x+t-s)u_2(s)ds + \frac{1}{4} \iint_{\Delta_1(x, t)} (x-s+t-\tau)f(s, \tau)dsd\tau. \quad (4)$$

Переносим в уравнении (1) функцию $-q(t)u(x, t)$ в правую часть равенства, и используя формулу (4), получим линейное интегральное уравнение типа Вольтерра для функции $u(x, t)$:

$$u(x, t) = v(x, t) - \frac{1}{4} \iint_{\Delta_1(x, t)} (x-s+t-\tau)q(\tau)f(s, \tau)dsd\tau, (x, t) \in \Delta_1(x_0, t_0) \quad (5)$$

Из уравнения (5), условий теоремы 1 и выражения (4) следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно доказать существование единственной функции $u \in C(\Delta_1(x_0, t_0))$, удовлетворяющей (5). Докажем существование непрерывного решения уравнения (5). Для этого определим последовательность $u_n(x, t), n = 0, 1, 2, \dots$, равенствами

$$u_n(x, t) = v(x, t) - \frac{1}{4} \iint_{\Delta_1(x, t)} (x-s+t-\tau)q(\tau)u_{n-1}(s, \tau)dsd\tau. \\ u_0(x, t) = 0. \quad (6)$$

Из условий теоремы 1 следует, что $u_n \in C(\Delta_1(x_0, t_0))$. Как и в работе [6,12], используя метод математической индукции, несложно показать, что

$$|u_n(x, t) - u_{n-1}(x, t)| \leq \|v\|_0 \frac{(\|q\|_0)^n t_0^{3n}}{(3n)!}, (x, t) \in \Delta_1, \quad (7)$$

где

$$\|v\|_0 = \max_{(x, t) \in \Delta_1} |v(x, t)|, \|q\|_0 = \max_{0 \leq t \leq t_0} |q(t)|.$$

Из оценки (7) следует, что последовательность функций $u_n(x, t)$, непрерывных в $\Delta_1(x_0, t_0)$, равномерно сходится к функции $u(x, t)$, непрерывной в $\Delta_1(x_0, t_0)$. Переходя в равенстве (6) к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $u(x, t)$ является решением уравнения (5). Таким образом, существование непрерывного решения уравнения (5) доказана.

Докажем единственность решения уравнения (5). Пусть функции $u_1(x, t), u_2(x, t)$ являются решением уравнения (5). Тогда для их разности $V(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ имеем однородное уравнение

$$V(x, t) = -\frac{1}{4} \iint_{\Delta_1(x, t)} (x - s + t - \tau) q(\tau) V(s, \tau) ds d\tau, \quad (8)$$

которое имеет только нулевое решение в классе непрерывных функций в области $\Delta_1(x_0, t_0)$. Действительно, если

$$U(t) = \max_{x_0 + (t-t_0) \leq x \leq x_0 - (t-t_0)} |V(x, t)|,$$

то из (8) вытекает

$$U(t) \leq \frac{\|q\|_0}{2} \int_0^t (t - \tau)^2 U(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (9)$$

И, значит, $U(t) \equiv 0$ и, следовательно, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ в $\Delta_1(x_0, t_0)$. Таким образом, мы показали существование единственного непрерывного решения интегрального уравнения (5). Покажем теперь, что это решение в области $\Delta_1(x_0, t_0)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка и определяет классическое решение задачи (1), (2). С этой целью перепишем двойной интеграл по области $\Delta_1(x, t)$, в (6), в виде повторного:

$$u(x, t) = v(x, t) - \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} (x - s + t - \tau) q(\tau) u(s, \tau) ds d\tau.$$

Так как $v(x, t) \in C^3(\Delta_1(x_0, t_0))$, то выражение, справа в формуле (4) имеет частные производные первого порядка:

$$u_t(x, t) = v_t(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) q(\tau) u(x - t + \tau, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\tau) u(s, \tau) ds d\tau, \quad (10)$$

$$u_x(x, t) = v_x(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) q(\tau) u(x - t + \tau, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} q(\tau) u(s, \tau) ds d\tau. \quad (11)$$

Полученные равенства показывают, что $u_t(x, t), u_x(x, t)$, являются непрерывными функциями в $\Delta_1(x_0, t_0)$. Следовательно, правые части равенств (10), (11) в области $\Delta_1(x_0, t_0)$ имеют непрерывные частные производные второго и третьего порядков:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) = v_{tt}(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^t q(\tau) u(x - t + \tau, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) q(\tau) u_x(x - t + \tau, \tau) d\tau - \\ - \frac{1}{4} \int_0^t q(\tau) [u(x + t - \tau, \tau) + u(x - t + \tau, \tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
u_{tx}(x, t) = v_{tx}(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) q(\tau) u_x(x - t + \tau, \tau) d\tau - \\
- \frac{1}{4} \int_0^t q(\tau) [u(x + t - \tau, \tau) + u(x - (t - \tau), \tau)] d\tau,
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
u_{xx}(x, t) = v_{xx}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) q(\tau) u_x(x - t + \tau, \tau) d\tau - \\
- \frac{1}{4} \int_0^t q(\tau) [u_x(x + t - \tau, \tau) + u_x(x - t + \tau, \tau)] d\tau,
\end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
u_{ttx}(x, t) = v_{ttx}(x, t) - \frac{1}{4} \int_0^t q(\tau) u_x(x + t - \tau, \tau) d\tau - \frac{3}{4} \int_0^t q(\tau) u_x(x - t + \tau, \tau) d\tau + \\
+ \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) q(\tau) u_{xx}(x - t + \tau, \tau) d\tau,
\end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
u_{ttt}(x, t) = v_{ttt}(x, t) - q(t)u(x, t) + \frac{3}{4} \int_0^t q(\tau) u_x(x - t + \tau, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t u_{xx}(x + t - \tau, \tau) d\tau - \\
+ \frac{1}{4} \int_0^t (t - \tau) q(\tau) u_x(x - t + \tau, \tau) d\tau.
\end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
u_{xxt}(x, t) = v_{xxt}(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^t q(\tau) u_x(x - t + \tau, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) q(\tau) u_{xx}(x - t + \tau, \tau) d\tau - \\
- \frac{1}{4} \int_0^t q(\tau) [u_{xx}(x + t - \tau, \tau) + u_{xx}(x - t + \tau, \tau)] d\tau,
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
u_{xxx}(x, t) = v_{xxx}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) q(\tau) u_{xx}(x - t + \tau, \tau) d\tau - \\
- \frac{1}{4} \int_0^t q(\tau) [u_{xx}(x + t - \tau, \tau) + u_{xx}(x - t + \tau, \tau)] d\tau.
\end{aligned} \quad (18)$$

Из формул (12)-(18) следует, что $u_{tt}(x, t), u_{xt}(x, t), u_{xx}(x, t), u_{ttt}(x, t), u_{ttx}(x, t), u_{xxt}(x, t), u_{xxx}(x, t)$, являются непрерывными функциями в $\Delta_1(x_0, t_0)$, а функция $u(x, t)$ определяет классическое решение задачи (1), (2). Теорема 1 доказана.

□

Перейдем к исследованию обратной задачи. Справедлива

Теорема 2. Пусть для функций $u_i(x), i = 0, 1, 2, f(x, t)$ выполнены условия теоремы 1, $h(t) \in C^3([0, t_0])$ и для функций $u_i, i = 0, 1, 2, h$ выполнены условия согласования $u_0(0) = h(0), u_1(0) = h'(0), u_2(0) = h''(0)$. Тогда если $|h(t)| \geq \alpha > 0, t \in [0, t_0]$, то для достаточно малых $T > 0$ решение обратной задачи (1)-(3) на отрезке $[0, T]$ существует, единственно и принадлежит классу $C[0, T]$.

Доказательство. Положив в формуле (16) $x = 0$, воспользуемся переопределением (4). Тогда получим

$$h'''(t) = v_{ttt}(0, t) - q(t)h(t) + \frac{1}{4} \int_0^t q(\tau)[3u_x(-t + \tau, \tau) - u_x(t - \tau, \tau)]d\tau - \frac{1}{4} \int_0^t q(\tau)u_{xx}(-t + \tau, \tau)d\tau.$$

Отсюда, учитывая $|h(t)| \geq \alpha > 0$ получим

$$q(t) = q_1(t) + \frac{1}{4h(t)} \int_0^t q(\tau)[3u_x(t - \tau, \tau) - u_x(-(t - \tau), \tau)]d\tau - \frac{1}{4h(t)} \int_0^t q(\tau)u_{xx}(t - \tau, \tau)d\tau, \quad (19)$$

где

$$q_1(t) = 2[h'''(t) - v_{ttt}(0, t)]/h(t)$$

Система уравнений (5), (11), (14), (19) является замкнутой системой нелинейных интегральных уравнений второго рода относительно функций $u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t), q(t)$. Нетрудно убедиться, что для достаточно малых $T > 0$ для этой системы уравнений в области $\Delta(x_0, t_0)$ имеет место принцип сжатых отображений. Для этого запишем эту систему уравнений в виде операторного уравнения

$$z = Az, \quad (20)$$

где z векторная функция переменных x, t с компонентами z_1, z_2, z_3 , причем

$$z_1(x, t) = u(x, t), z_2(x, t) = u_x(x, t), z_3(x, t) = u_{xx}(x, t), z_4(x, t) = z_4(t) = q(t),$$

а оператор A определен на множестве функций $z \in C(\Delta_1(x_0, t_0))$ и в соответствии с равенствами (5), (11), (14), (19) имеет вид $A = (A_1, A_2, A_3, A_4)$:

$$A_1 z = v(x, t) - \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} (x-s+t-\tau) z_4(\tau) u(s, \tau) ds d\tau, \\ A_2 z = v_x(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau) z_4(\tau) z_1(x-t+\tau, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} z_4(\tau) z_1(s, \tau) ds d\tau, \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
A_3 z &= v_{xx}(x, t) + \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) z_4(\tau) z_2(x - t + \tau, \tau) d\tau - \\
&\quad - \frac{1}{4} \int_0^t z_4(\tau) [z_2(x + t - \tau, \tau) - z_2(x - t + \tau, \tau)] d\tau, \\
A_4 z &= q_1(t) + \frac{1}{4h(t)} \int_0^t z_4(\tau) [3z_2(t - \tau, \tau) - z_2(-(t - \tau), \tau)] d\tau - \\
&\quad - \frac{1}{4h(t)} \int_0^t z_4(\tau) z_3(t - \tau, \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Покажем, что при достаточно малых T оператор A осуществляет сжатое отображение шара радиуса r с центром в точке $z_0 = (z_{01}, z_{02}, z_{03}, z_{04})$:

$$z_{01} = v(x, t), z_{02} = v_x(x, t), z_{03} = v_{xx}(x, t), z_{04} = q_0(t)$$

на себя. Тем самым мы покажем, что уравнение (20) имеет в области $\Delta(x_0, t_0)$ при достаточно малом T единственное решение, удовлетворяющее неравенству

$$\|z - z_0\| \leq M. \quad (22)$$

Норму $\|z\|$ определим равенством

$$\|z\|(t_0) = \max_{1 \leq k \leq 4} \max_{(x, t) \in \Delta(x_0, t_0)} |z_k(x, t)|.$$

Очевидно, что для элементов z , принадлежащих шару $S(z_0, r)$ имеет место неравенство

$$\|z\| \leq \|z_0\|(t_0) + M = K. \quad (23)$$

С другой стороны непосредственно оценивая интегралы, входящие в (24), находим

$$\begin{aligned}
\|A_1 z - z_0\|(t_0) &= \left\| \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} (x - s + t - \tau) z_4(\tau) z_1(s, \tau) ds d\tau \right\| \leq \\
&\leq \frac{K^2}{2} \left\| \int_0^t (t - \tau^2) d\tau \right\| \leq \frac{K^2 T^3}{6},
\end{aligned}$$

$$\|A_2 z - z_0\| = \left\| \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) z_4(\tau) z_1(x - t + \tau, \tau) d\tau - \frac{1}{4} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} z_4(\tau) z_1(s, \tau) ds d\tau \right\| \leq 2K^2 T^2,$$

$$\|A_3 z - z_0\| \leq \left\| \frac{1}{2} \int_0^t (t - \tau) z_4(\tau) z_2(\tau) (x - t + \tau, \tau) d\tau \right\| +$$

$$+\frac{1}{4}\left\|\int_0^t z_4(\tau)[z_2(\tau)(x+t-\tau, \tau)-z_2(\tau)(x-t+\tau, \tau)]d\tau\right\|\leq \frac{2K^2(T^2+2T)}{4},$$

$$\begin{aligned}\|A_4 z - z_0\| &\leq \left\|\frac{1}{4h(t)}\int_0^t z_4(\tau)[3z_2(t-\tau, \tau)-z_2(-(t-\tau), \tau)]d\tau\right\|+ \\ &+\left\|\frac{1}{4h(t)}\int_0^t z_4(\tau)z_3(t-\tau, \tau)d\tau\right\|\leq \frac{5TK^2}{4\alpha}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|Az - z_0\| \leq K^2 \max\left(\frac{T^3}{6}, 2T^2, \frac{T^2+2T}{4}, \frac{5T}{4\alpha}\right).$$

Поэтому, при $T \leq T^*$ оператор A переводит $S(z_0, r)$ в себя, где T^* определяется равенством

$$T^* = \min\left(\sqrt[3]{\frac{6}{\|z_0\|(t_0)}}, \frac{1}{\sqrt{2\|z_0\|^2(t_0)}}, \frac{2}{\sqrt{\|z_0\|^2(t_0)+2\|z_0\|(t_0)}}, \frac{2\sqrt{\alpha}}{5\|z_0\|(t_0)}\right). \quad (24)$$

Пусть теперь z^1, z^2 любые два элемента из множества $S(z_0, r)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида

$$|z_i^1 z_k^1 - z_i^2 z_k^2| \leq |z_k^1 - z_k^2| |z_i^1| + |z_i^1 - z_i^2| |z_k^2| \leq 4K \|z^1 - z^2\|(T),$$

получим

$$\|Az^1 - Az^2\| \leq 4K \|z^1 - z^2\|(T) \max\left(\frac{T^3}{6}, 2T^2, \frac{T^2+2T}{4}, \frac{5T}{4\alpha}\right) \leq \frac{T}{T^*} \|z^1 - z^2\|(T).$$

Отсюда следует, что

$$\|Az^1 - Az^2\|(t_0) \leq \frac{T}{T^*} \|z^1 - z^2\|$$

и оператор A осуществляет сжатое отображение шара $S(z_0, r)$ на себя. Тогда, согласно теореме С.Банаха уравнение (23) имеет единственное решение, принадлежащее этому шару. Следовательно, решая систему уравнений (5), (14), (17), (22) методом последовательных приближений, мы однозначно построим в области $\Delta_1(x_0, T)$ для $t_0 \in (0, T^*)$ функции $u(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t), q(t)$. Тем самым однозначно определяем функцию $q(t)$ на отрезке $[0, T^*]$. Теорема 2 доказана. $\square$

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы/References

- [1] Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н., “Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах”, *Прикл. математика и механика*, **24**:5 (1960), 852–864. [Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Kochina I. N., “Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks”, *PMM*, **24**:5 (1960), 852–864].
- [2] Hallaire M., “L’eau et la productions vegetable”, *Institut National de la Recherche Agronomique*, **9** (1964).
- [3] Чудновский А. Ф., *Теплофизика почвы*, Наука, М, 1976, 352 с. [Chudnovsky A. F., *Thermophysics of the soil*, Moscow, Nauka, 1976, 352 pp.]
- [4] Дзекцер Е. С., “Уравнения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах”, *Докл. АН СССР*, **220**:3 (1975), 540–543. [Dzektser E. S., “Equation of motion of underground water with a free surface in multilayer media”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **220**:3 (1975), 540–543].
- [5] Руденко О. В., Солуян С. И., *Теоретические основы нелинейной акустики*, Наука, М, 1975. [Rudenko O. V., Soluyan S. I., *Theoretical Principles of Nonlinear Acoustics*, Moscow, Nauka, 1975].
- [6] Аблабеков Б. С., Асанов А. Р., Курманбаева А. К., *Обратные задачи для дифференциальных уравнений третьего порядка*, Илим, Бишкек, 2011 [Ablabekov B. S., Asanov A. R., Kurmanbaeva A. K., Ilim, Bishkek, 2011, 156 pp.]
- [7] Аблабеков Б. С., Жороев А. К., “О разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения третьего порядка”, *Евразийское Научное Объединение*, **1**:5(51) (2019), 1–4. [Ablabekov B. S., Joroev A. K., “O razreshimosti zadachi Cauchy dlja hyperbolicheskogo uravnenija”, *Evrazijskoe Nauchnoe Obединenie*, **1**:5(51) (2019), 1–4].
- [8] Аблабеков Б. С., *Обратные задачи для псевдопараболических уравнений*, Илим, Бишкек, 2001, 183 с. [Ablabekov B. S., *Inverse problems for pseudoparabolic Equations*, Ilim, Bishkek, 2001, 183 pp.]
- [9] Зикиров О. С., “О краевых задачах для гиперболического уравнения третьего порядка”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **9**:1 (2007), 45–48. [Zikirov O. S., “O kraevykh zadachakh dlya giperbolicheskogo uravneniya tret’ego porjadka”, *Doklady Adygskoy (Cherkesskoy) Mezhdunarodnoy akademii nauk*, **9**:1 (2007), 45–48].
- [10] Зикиров О. С., “Локальные и нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений третьего порядка”, *Современная математика и ее приложения*, **68** (2011.), 101–120. [Zikirov O. S., “Local and nonlocal boundary-value problems for third-order hyperbolic equations”, *Journal of Mathematical Sciences*, **175**:1 (2011), 104–123].
- [11] Денисов А. М., “Интегро-функциональные уравнения для задачи определения источника в волновом уравнении”, *Дифференц. уравнения*, **42**:9 (2006), 1155–1165. [Denisov A. M., “Integro-functional equations in the inverse source problem for the wave equation”, *Differ. Equat.*, **42**:9 (2006), 1221–1232].
- [12] Романов В. Г., *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984. [Romanov V. G., *Inverse Problems of Mathematical Physics*, VNU Science Press, Utrecht, 1987].
- [13] Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах, 2005, 296 с. [Romanov V. G., “Ustoychivost’ v obratnykh zadachakh”, 2005, 296 pp.]

On the definition of a time-dependent lower coefficient in a third-order hyperbolic equation

B. S. Ablabekov, A. K. Goroev

Kyrgyz national University named G. Balasagin, 720033, Kyrgyzstan,
Frunze st., 547, Kyrgyzstan

E-mail: ablabekov_63@mail.ru, joroev1962@mail.ru

The paper deals with an inverse problem for a hyperbolic equation of the third order. An inverse problem is posed, which consists in determining an unknown coefficient that depends on time. As additional information for solving the inverse problem, we set the values of the solution to the problem at an interior point, and prove the existence and uniqueness theorem for the solution of the inverse problem. The proof is based on the derivation of a nonlinear system of integral equations of the Volterra type of the second kind and the proof of its solvability.

Key words: hyperbolic equation, inverse coefficient problem, uniqueness, existence, Volterra equation.

DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-9-18

Original article submitted: 28.01.2021

Revision submitted: 03.03.2021

For citation. Ablabekov B. S., Goroev A. K. On the definition of a time-dependent lower coefficient in a third-order hyperbolic equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021, **34**: 1, 9-18. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-34-1-9-18

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Ablabekov B. S., Goroev A. K., 2021

Funding. The study was carried out without financial support from foundations.