УДК 517.956

Научная статья

Нелокальная задача с интегральными условиями для трехмерного гиперболического уравнения высокого порядка

Ш. Ш. Юсубов

Бакинский Государственный Университет, ул. З. Халилова 23, AZ1148, г. Баку, Азербайджан

E-mail: yusubov_shakir@mail.ru

В работе для трехмерного гиперболического уравнения высокого порядка с доминирующей смешанной производной исследуется разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями. Поставленная задача сводится к интегральному уравнению и с помощью априорных оценок доказывается существование единственного решения.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, нелокальная задача, интегральное уравнение.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-51-62

Поступила в редакцию: 04.08.2020

В окончательном варианте: 03.11.2020

Для цитирования. Юсубов Ш.Ш. Нелокальная задача с интегральными условиями для трехмерного гиперболического уравнения высокого порядка // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 33. № 4. С. 51-62. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-51-62

Контент публикуется на условиях лицензии *Creative Commons Attribution 4.0 International* (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Юсубов Ш. Ш., 2020

Постановка задачи

В области $G = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_i \in G_i = (x_i^0, x_i^1), i = 1, 2, 3\}$ рассмотрим уравнение

$$(l_{n_1 n_2 n_3} u)(x) \equiv D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} D_{x_3}^{n_3} u(x) + \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3 \leq n_1+n_2+n_3 \\ 0 \leq i_k \leq n_k; k=1,2,3}} a_{i_1 i_2 i_3} D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} D_{x_3}^{i_3} u(x) = \\ = \varphi_{n_1 n_2 n_3}(x) \quad (1)$$

с условиями

$$(l_{i_1 0 0} u)(x_2, x_3) \equiv D_{x_1}^{i_1} u(x_1^0, x_2, x_3) = \varphi_{i_1 0 0}(x_2, x_3), \\ (x_2, x_3) \in G_2 \times G_3, i_1 = \overline{0, n_1 - 1}, \quad (2)$$

$$(l_{n_1 i_2 0} u)(x_1, x_3) \equiv D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{i_2} u(x_1, x_2^0, x_3) = \varphi_{n_1 i_2 0}(x_1, x_3), \\ (x_1, x_3) \in G_1 \times G_3, i_2 = \overline{0, n_2 - 1}, \quad (3)$$

Финансирование. Работа выполнялась без финансовой поддержки

$$(l_{n_1 n_2 i_3} u)(x_1, x_2) \equiv \int_{x_3^0}^{x_3^1} \alpha_{i_3}(x_3) D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} D_{x_3}^{i_3} u(x_1, x_2, x_3) dx_3 = \varphi_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2), \quad (4)$$

$$(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2, \quad i_3 = \overline{0, n_3 - 1}.$$

Здесь $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ — искомая функция, $D_s^k = \frac{\partial^k}{\partial s^k}$ — оператор обобщенного дифференцирования в смысле С. Л. Соболева, $n_i, i = 1, 2, 3$, — натуральные числа, $a_{i_1 i_2 i_3}(x)$, $i_k = \overline{0, n_k}, k = 1, 2, 3$, — измеримые на G функции, удовлетворяющие условиям: $a_{i_1 i_2 i_3}(x) \in L_p(G)$, $i_k = \overline{0, n_k - 1}, k = 1, 2, 3$ и существуют функции $a_{n_1 i_2 i_3}^0(x_2, x_3) \in L_p(G_2 \times G_3)$, $a_{i_1 n_2 i_3}^0(x_1, x_3) \in L_p(G_1 \times G_3)$, $a_{i_1 i_2 n_3}^0(x_1, x_2) \in L_p(G_1 \times G_2)$, $a_{n_1 n_2 i_3}^0(x_3) \in L_p(G_3)$, $a_{n_1 i_2 n_3}^0(x_2) \in L_p(G_2)$, $a_{i_1 n_2 n_3}^0(x_1) \in L_p(G_1)$, $i_k = \overline{0, n_k - 1}, k = 1, 2, 3$ такие что, выполнены условия

$$|a_{n_1 i_2 i_3}(x)| \leq a_{n_1 i_2 i_3}^0(x_2, x_3), \quad |a_{i_1 n_2 i_3}(x)| \leq a_{i_1 n_2 i_3}^0(x_1, x_3),$$

$$|a_{i_1 i_2 n_3}(x)| \leq a_{i_1 i_2 n_3}^0(x_1, x_2), \quad |a_{n_1 n_2 i_3}(x)| \leq a_{n_1 n_2 i_3}^0(x_3),$$

$$|a_{n_1 i_2 n_3}(x)| \leq a_{n_1 i_2 n_3}^0(x_2), \quad |a_{i_1 n_2 n_3}(x)| \leq a_{i_1 n_2 n_3}^0(x_1), \quad i_k = \overline{0, n_k - 1}, \quad k = 1, 2, 3$$

почти всюду на G ; $\alpha_{i_3}(x_3) \in L(G_3)$, $\varphi_{i_1 0 0}(x_2, x_3) \in W_p^{(n_2, n_3)}(G_2 \times G_3)$, $\varphi_{n_1 i_2 0}(x_1, x_3) \in W_p^{(0, n_3)}(G_1 \times G_3)$, $\varphi_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2) \in L_p(G_1 \times G_2)$, $i_k = \overline{0, n_k - 1}, k = 1, 2, 3$, — заданные функции.

Ставится задача: найти решение задачи (1)-(4) в пространстве С. Л. Соболева

$$W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G) = \{u \in L_p(G) | D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} D_{x_3}^{i_3} u \in L_p(G), i_k = \overline{0, n_k}, k = 1, 2, 3\}$$

с доминирующей смешанной производной $D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} D_{x_3}^{n_3} u$ и нормой

$$\|u\|_{W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)} = \sum_{\substack{i_k=0 \\ k=1,2,3}}^{n_k} \|D_{x_1}^{i_1} D_{x_2}^{i_2} D_{x_3}^{i_3} u\|_{L_p(G)}.$$

Отметим, что в последнее время значительно возрос интерес к уравнениям вида (1), в связи их появлением при изучении вопросов фильтрации жидкости в трещиноватых средах, влагопереноса в почвогрунтах, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании различных биологических процессов и явлений, продольного колебания в тонком упругом стержне с учетом эффектов поперечной инерции, распространения волн в диспергирующих средах, а также в теории оптимальных процессов и обратных задач и т.д. (см. например, [1]-[4]).

Уравнение (1) относится к числу нестрогих гиперболических уравнений для которых плоскости $x_i = \text{const}$, $i = 1, 2, 3$ являются, соответственно, n_i , $i = 1, 2, 3$ -кратными, действительными характеристиками. Это уравнение в некотором смысле можно рассматривать также как псевдопараболическое уравнение высокого порядка [5].

Уравнение (1) и его частные случаи с достаточно гладкими коэффициентами изучена в [6]-[16] при локальных и нелокальных краевых условиях.

В предлагаемой работе доказано существование единственного решения задачи (1)-(4) с коэффициентами из L_p .

Сведение задачи (1)-(4) к интегральному уравнению

Используя операторно-матричные обозначения задачу (1)-(4) запишем в следующем виде

$$lu = \varphi, \quad (5)$$

где оператор $l = (l_{n_1 n_2 n_3}, l_{i_1 00}, i_1 = \overline{0, n_1 - 1}, l_{n_1 i_2 0}, i_2 = \overline{0, n_2 - 1}, l_{n_1 n_2 i_3}, i_3 = \overline{0, n_3 - 1})$ действует из $W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$ в $H_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$, а $\varphi = (\varphi_{n_1 n_2 n_3}(x_1, x_2, x_3), \varphi_{i_1 00}(x_2, x_3), i_1 = \overline{0, n_1 - 1}, \varphi_{n_1 i_2 0}(x_1, x_3), i_2 = \overline{0, n_2 - 1}, \varphi_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2), i_3 = \overline{0, n_3 - 1}) \in H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$,
 $H_p^{(n_1, n_2, n_3)} = L_p(G) \times \prod_{i_1=0}^{n_1-1} W_p^{(n_2, n_3)}(G_2 \times G_3) \times \prod_{i_2=0}^{n_2-1} W_p^{(0, n_3)}(G_1 \times G_3) \times \prod_{i_3=0}^{n_3-1} L_p(G_1 \times G_2)$.

Норму в пространстве $H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$ определим естественным образом при помощи равенства

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{H_p^{(n_1, n_2, n_3)}} &= \|\varphi_{n_1 n_2 n_3}\|_{L_p(G)} + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \|\varphi_{i_1 00}\|_{W_p^{(n_2, n_3)}(G_2 \times G_3)} + \\ &+ \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \|\varphi_{n_1 i_2 0}\|_{W_p^{(0, n_3)}(G_1 \times G_3)} + \sum_{i_3=0}^{n_3-1} \|\varphi_{n_1 n_2 i_3}\|_{L_p(G_1 \times G_2)}. \end{aligned}$$

При наложенных условиях на коэффициенты задачи (1)-(4), оператор $l : W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G) \rightarrow H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$ линеен и ограничен.

Исследование задачи (1)-(4) проводится на основе специального интегрального представления функции $u \in W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$ [13]:

$$\begin{aligned} u(x) = (Qb)(x) &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \frac{(x_1 - x_1^0)^{i_1}}{i_1!} b_{i_1 00}(x_2, x_3) + \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \frac{(x_2 - x_2^0)^{i_2}}{i_2!} \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} b_{n_1 i_2 0}(\tau_1, x_3) d\tau_1 \\ &+ \sum_{i_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3 - x_3^0)^{i_3}}{i_3!} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} b_{n_1 n_2 i_3}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \\ &+ \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3-1}}{(n_3-1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1, \quad (6) \end{aligned}$$

с помощью элемента $b = (b_{n_1 n_2 n_3}(x), b_{i_1 00}(x_2, x_3), i_1 = \overline{0, n_1 - 1}, b_{n_1 i_2 0}(x_1, x_3), i_2 = \overline{0, n_2 - 1}, b_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2), i_3 = \overline{0, n_3 - 1}) \in H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$.

Из формулы (6) следует, что любая функция $u \in W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$ имеет следы $D_{x_1}^{i_1} u(x_1^0, x_2, x_3)$, $i_1 = \overline{0, n_1 - 1}$, $D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{i_2} u(x_1, x_2^0, x_3)$, $i_2 = \overline{0, n_2 - 1}$, $D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} D_{x_3}^{i_3} u(x_1, x_2, x_3^0)$, $i_3 = \overline{0, n_3 - 1}$ и операции взятия этих следов непрерывны из $W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$ в $W_p^{(n_2, n_3)}(G_1 \times G_3)$, $W_p^{(0, n_3)}(G_1 \times G_3)$, $L_p(G_1 \times G_2)$, соответственно. Для этих следов справедливы также равенства:

$$D_{x_1}^{i_1} u(x_1^0, x_2, x_3) = b_{i_1 00}(x_2, x_3), i_1 = \overline{0, n_1 - 1}, D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{i_2} u(x_1, x_2^0, x_3) = b_{n_1 i_2 0}(x_1, x_3), i_2 = \overline{0, n_2 - 1},$$

$$D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} D_{x_3}^{i_3} u(x_1, x_2, x_3^0) = b_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2), i_3 = \overline{0, n_3 - 1}, D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} D_{x_3}^{n_3} u(x) = b_{n_1 n_2 n_3}(x).$$

Легко показать, что существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что для любой $b \in H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$

$$C_1 \|b\|_{H_p^{(n_1, n_2, n_3)}} \leq \|Qb\|_{W_p^{(n_1, n_2, n_3)}} \leq C_2 \|b\|_{H_p^{(n_1, n_2, n_3)}}.$$

Из этих неравенств следует, что оператор Q осуществляет изоморфизм между пространствами $H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$ и $W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$. Поэтому пространства $W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$ и $H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$ можно отождествить в смысле изоморфизма.

Выберем элемент $b = (b_{n_1 n_2 n_3}(x), b_{i_1 00}(x_2, x_3), i_1 = \overline{0, n_1 - 1}, b_{n_1 i_2 0}(x_1, x_3), i_2 = \overline{0, n_2 - 1}, b_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2), i_3 = \overline{0, n_3 - 1}) \in H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$ таким образом, чтобы соответствующая функция $u(x)$ получаемая представлением (6) удовлетворяла условиям (2), (3), (4). Для этого подставим выражение (6) в условия (2), (3), (4). Тогда имеем

$$(l_{i_1 00} Qb)(x_2, x_3) \equiv b_{i_1 00}(x_2, x_3) = \varphi_{i_1 00}(x_2, x_3), (x_2, x_3) \in G_2 \times G_3, i_1 = \overline{0, n_1 - 1}, \quad (7)$$

$$(l_{n_1 i_2 0} Qb)(x_1, x_3) \equiv b_{n_1 i_2 0}(x_1, x_3) = \varphi_{n_1 i_2 0}(x_1, x_3), (x_1, x_3) \in G_1 \times G_3, i_2 = \overline{0, n_2 - 1}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (l_{n_1 n_2 i_3} Qb)(x_1, x_2) \equiv & \int_{x_3^0}^{x_3^1} \alpha_{i_3}(x_3) \left[\sum_{k_3=i_3}^{n_3-1} \frac{(x_3 - x_3^0)^{k_3-i_3}}{(k_3-i_3)!} b_{n_1 n_2 k_3}(x_1, x_2) + \right. \\ & \left. + \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3-i_3-1}}{(n_3-i_3-1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, x_2, \tau_3) d\tau_3 \right] dx_3 = \varphi_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in G_1 \times G_2, \\ & i_3 = \overline{0, n_3 - 1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} p = & \begin{pmatrix} \int_{x_3^0}^{x_3^1} \alpha_0(x_3) dx_3 & 0 & \dots & 0 \\ \int_{x_3^0}^{x_3^1} \alpha_0(x_3)(x_3 - x_3^0) dx_3 & \int_{x_3^0}^{x_3^1} \alpha_1(x_3) dx_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{x_3^0}^{x_3^1} \alpha_0(x_3) \frac{(x_3 - x_3^0)^{n_3-1}}{(n_3-1)!} dx_3 & \int_{x_3^0}^{x_3^1} \alpha_1(x_3) \frac{(x_3 - x_3^0)^{n_3-2}}{(n_3-2)!} dx_3 & \dots & \int_{x_3^0}^{x_3^1} \alpha_{n_3-1}(x_3) dx_3 \end{pmatrix}, \\ \Phi_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2) \equiv & \varphi_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2) - \int_{x_3^0}^{x_3^1} \left(\int_{x_3}^{x_3^1} \alpha_{i_3}(\tau_3) \frac{(\tau_3 - x_3)^{n_3-i_3-1}}{(n_3-i_3-1)!} d\tau_3 \right) \times \\ & b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, x_2, x_3) dx_3, i_3 = \overline{0, n_3 - 1}, \end{aligned} \quad (10)$$

систему (9) линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $b_{n_1 n_2 0}(x_1, x_2), b_{n_1 n_2 1}(x_1, x_2), \dots, b_{n_1 n_2 n_3-1}(x_1, x_2)$, запишем в виде векторного уравнения

$$\begin{aligned} & (b_{n_1 n_2 0}(x_1, x_2), b_{n_1 n_2 1}(x_1, x_2), \dots, b_{n_1 n_2 n_3-1}(x_1, x_2)) p = \\ & = (\Phi_{n_1 n_2 0}(x_1, x_2), \Phi_{n_1 n_2 1}(x_1, x_2), \dots, \Phi_{n_1 n_2 n_3-1}(x_1, x_2)). \end{aligned} \quad (11)$$

Ясно, что при $\alpha_{i_3} = \int_{x_3^0}^{x_3^1} \alpha_{i_3}(x_3) dx_3 \neq 0$, $i_3 = \overline{0, n_3 - 1}$, треугольная матрица p обратима.

Обратную к p матрицу обозначим через

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0n_3-1} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1n_3-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n_3-10} & p_{n_3-11} & \dots & p_{n_3-1n_3-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда из (11) получим

$$\begin{aligned} b_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2) &= \Phi_{n_1 n_2 0}(x_1, x_2) p_{0i_3} + \Phi_{n_1 n_2 1}(x_1, x_2) p_{1i_3} + \dots \\ &+ \Phi_{n_1 n_2 n_3-1}(x_1, x_2) p_{n_3-1 i_3} = \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \Phi_{n_1 n_2 k_3}(x_1, x_2) p_{k_3 i_3}, \quad i_3 = \overline{0, n_3 - 1}. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая (7), (8), (10), (12) в (6), представление функции $u(x)$ можем записать в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \frac{(x_1 - x_1^0)^{i_1}}{i_1!} \varphi_{i_1 00}(x_2, x_3) + \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \frac{(x_2 - x_2^0)^{i_2}}{i_2!} \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \varphi_{n_1 i_2 0}(\tau_1, x_3) d\tau_1 + \\ &+ \sum_{i_3=0}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3 - x_3^0)^{i_3}}{i_3!} p_{k_3 i_3} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \varphi_{n_1 n_2 k_3}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1 - \\ &- \sum_{i_3=0}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3 - x_3^0)^{i_3}}{i_3!} p_{k_3 i_3} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \left(\int_{x_3^0}^{x_3^1} \alpha_{k_3}(\tau_3) \frac{(\tau_3 - x_3)^{n_3-k_3-1}}{(n_3-k_3-1)!} d\tau_3 \right) \\ &\times b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, x_3) dx_3 d\tau_2 d\tau_1 + \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3-1}}{(n_3-1)!} \\ &\times b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если $\alpha_{i_3} \neq 0$, $i_3 = \overline{0, n_3 - 1}$, то любая функция $u \in W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$ удовлетворяющее условиям (2)-(4) представима в виде (13).

Используя полученный результат, решение задачи (1)-(4) будем искать в виде (13), где $b_{n_1 n_2 n_3} \in L_p(G)$ — неизвестная функция. Потребуем от функции (13) того, что она была решением уравнения (1). Для этого функцию (13) запишем в виде

$$u(x) = q(x) + \bar{u}(x), \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} q(x) &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \frac{(x_1 - x_1^0)^{i_1}}{i_1!} \varphi_{i_1 00}(x_2, x_3) + \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \frac{(x_2 - x_2^0)^{i_2}}{i_2!} \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \varphi_{n_1 i_2 0}(\tau_1, x_3) d\tau_1 + \\ &+ \sum_{i_3=0}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3 - x_3^0)^{i_3}}{i_3!} p_{k_3 i_3} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \varphi_{n_1 n_2 k_3}(\tau_1, \tau_2) d\tau_2 d\tau_1, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) = & - \sum_{i_3=0}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3-x_3^0)^{i_3}}{i_3!} p_{k_3 i_3} \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_1-\tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \frac{(x_2-\tau_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \times \\ & \times \left(\int_{x_3^0}^{x_3} \alpha_{k_3}(\tau_3) \frac{(\tau_3-x_3)^{n_3-k_3-1}}{(n_3-k_3-1)!} d\tau_3 \right) b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, x_3) dx_3 d\tau_2 d\tau_1 + \\ & + \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_1-\tau_1)^{n_1-1}}{(n_1-1)!} \frac{(x_2-\tau_2)^{n_2-1}}{(n_2-1)!} \frac{(x_3-\tau_3)^{n_3-1}}{(n_3-1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда учитывая функцию (14) в уравнение (1), для функций $\bar{u}(x)$ получается уравнение

$$(l_{n_1 n_2 n_3} \bar{u})(x) = \psi(x), \quad x \in G, \quad (17)$$

где

$$\psi(x) = \varphi_{n_1 n_2 n_3}(x) - (l_{n_1 n_2 n_3} q)(x). \quad (18)$$

Учитывая (16), уравнение (17) запишем в виде

$$\begin{aligned} (l_{n_1 n_2 n_3} \bar{u})(x) = & (Ab_{n_1 n_2 n_3})(x) \equiv b_{n_1 n_2 n_3}(x) + \int_{x_1^0}^{x_1} K_1(\tau_1, x) b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, x_2, x_3) d\tau_1 + \\ & + \int_{x_2^0}^{x_2} K_2(\tau_2, x) b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, \tau_2, x_3) d\tau_2 + \int_{x_3^0}^{x_3} K_3(\tau_3, x) b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, x_2, \tau_3) d\tau_3 + \\ & + \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} K_{12}(\tau_1, \tau_2, x) b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, x_3) d\tau_2 d\tau_1 + \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_3^0}^{x_3} K_{13}(\tau_1, \tau_3, x) b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, x_2, \tau_3) d\tau_3 d\tau_1 + \\ & + \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} K_{23}(\tau_2, \tau_3, x) b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_3 d\tau_2 + \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} K_{123}(\tau, x) b_{n_1 n_2 n_3}(\tau) d\tau = \psi(x), \quad x \in G, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(\tau_1, x) = & \sum_{i_1=0}^{n_1-1} a_{i_1 n_2 n_3}(x) \theta(x_1 - \tau_1) \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!}, \\ K_2(\tau_2, x) = & \sum_{i_2=0}^{n_2-1} a_{n_1 i_2 n_3}(x) \theta(x_2 - \tau_2) \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-i_2-1}}{(n_2-i_2-1)!}, \\ K_3(\tau_3, x) = & \sum_{i_3=0}^{n_3-1} a_{n_1 n_2 i_3}(x) \times \\ & \times \left[\theta(x_3 - \tau_3) \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3-i_3-1}}{(n_3-i_3-1)!} - \sum_{l_3=i_3}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3-x_3^0)^{l_3-i_3}}{(l_3-i_3)!} p_{k_3 l_3} \int_{\tau_3}^{x_3} \alpha_{k_3}(s_3) \frac{(s_3-\tau_3)^{n_3-k_3-1}}{(n_3-k_3-1)!} ds_3 \right], \\ K_{12}(\tau_1, \tau_2, x) = & \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} a_{i_1 i_2 n_3}(x) \theta(x_1 - \tau_1) \theta(x_2 - \tau_2) \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-i_2-1}}{(n_2-i_2-1)!} \\ K_{13}(\tau_1, \tau_3, x) = & \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_3=0}^{n_3-1} a_{i_1 n_2 i_3}(x) \left[\theta(x_1 - \tau_1) \theta(x_3 - \tau_3) \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!} \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3-i_3-1}}{(n_3-i_3-1)!} - \right. \\ & \left. - \sum_{l_3=i_3}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3-x_3^0)^{l_3-i_3}}{(l_3-i_3)!} p_{k_3 l_3} \theta(x_1 - \tau_1) \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!} \int_{\tau_3}^{x_3} \alpha_{k_3}(s_3) \frac{(s_3-\tau_3)^{n_3-k_3-1}}{(n_3-k_3-1)!} ds_3 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{23}(\tau_2, \tau_3, x) &= \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \sum_{i_3=0}^{n_3-1} a_{n_1 i_2 i_3}(x) \left[\theta(x_2 - \tau_2) \theta(x_3 - \tau_3) \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2 - i_2 - 1}}{(n_2 - i_2 - 1)!} \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3 - i_3 - 1}}{(n_3 - i_3 - 1)!} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l_3=i_3}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3 - x_3^0)^{l_3 - i_3}}{(l_3 - i_3)!} p_{k_3 l_3} \theta(x_2 - \tau_2) \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2 - i_2 - 1}}{(n_2 - i_2 - 1)!} \int_{\tau_3}^{x_3^1} \alpha_{k_3}(s_3) \frac{(s_3 - \tau_3)^{n_3 - k_3 - 1}}{(n_3 - k_3 - 1)!} ds_3 \right], \\
K_{123}(\tau, x) &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \sum_{i_3=0}^{n_3-1} a_{i_1 i_2 i_3}(x) \left[\theta(x_1 - \tau_1) \theta(x_2 - \tau_2) \theta(x_3 - \tau_3) \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1 - i_1 - 1}}{(n_1 - i_1 - 1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2 - i_2 - 1}}{(n_2 - i_2 - 1)!} \times \right. \\
&\quad \times \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3 - i_3 - 1}}{(n_3 - i_3 - 1)!} - \sum_{l_3=i_3}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3 - x_3^0)^{l_3 - i_3}}{(l_3 - i_3)!} p_{k_3 l_3} \theta(x_1 - \tau_1) \theta(x_2 - \tau_2) \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1 - i_1 - 1}}{(n_1 - i_1 - 1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2 - i_2 - 1}}{(n_2 - i_2 - 1)!} \times \\
&\quad \left. \times \int_{\tau_3}^{x_3^1} \alpha_{k_3}(s_3) \frac{(s_3 - \tau_3)^{n_3 - k_3 - 1}}{(n_3 - k_3 - 1)!} ds_3 \right],
\end{aligned}$$

$$\theta(x - s) = \begin{cases} 1, & x \geq s, \\ 0, & x < s. \end{cases}$$

Этим доказана следующая теорема.

Теорема 2. Для того, чтобы оператор $l = (l_{n_1 n_2 n_3}, l_{i_1 0 0}, i_1 = \overline{0, n_1 - 1}, l_{n_1 i_2 0}, i_2 = \overline{0, n_2 - 1}, l_{n_1 n_2 i_3}, i_3 = \overline{0, n_3 - 1})$ задачи (1)-(4) осуществлял гомеоморфизм между пространствами $W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$ и $H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$, необходимо и достаточно, чтобы интегральное уравнение (19) имело единственное решение $b_{n_1 n_2 n_3} \in L_p(G)$ для любой $\psi \in L_p(G)$.

Эта теорема, в частности, показывает, что если оператор A интегрального уравнения (19) имеет ограниченный обратный A^{-1} , определенный на $L_p(G)$, то задача (1)-(4) для любого $\varphi = (\varphi_{n_1 n_2 n_3}(x), \varphi_{i_1 0 0}(x_2, x_3), i_1 = \overline{0, n_1 - 1}, \varphi_{n_1 i_2 0}(x_1, x_3), i_2 = \overline{0, n_2 - 1}, \varphi_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2), i_3 = \overline{0, n_3 - 1}) \in H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$ имеет единственное решение $u \in W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$ и для некоторого постоянного $M > 0$ имеет место неравенство

$$\|u\|_{W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)} \leq M \|\varphi\|_{H_p^{(n_1, n_2, n_3)}}.$$

Существование и единственность решения задачи (1)-(4)

Для доказательства существования единственного решения задачи (1)-(4) сначала исследуем разрешимость уравнения (19). Запишем это уравнение в виде

$$(Ab_{n_1 n_2 n_3})(x) \equiv (I + A_1 + A_2)b_{n_1 n_2 n_3}(x) = \psi(x), \quad (20)$$

где I — единичный оператор и

$$\begin{aligned}
(A_1 b_{n_1 n_2 n_3})(x) &= \sum_{i_1=0}^{n_1-1} a_{i_1 n_2 n_3}(x) \int_{x_1^0}^{x_1^1} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1 - i_1 - 1}}{(n_1 - i_1 - 1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, x_2, x_3) d\tau_1 + \\
&\quad + \sum_{i_2=0}^{n_2-1} a_{n_1 i_2 n_3}(x) \int_{x_2^0}^{x_2^1} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2 - i_2 - 1}}{(n_2 - i_2 - 1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, \tau_2, x_3) d\tau_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i_3=0}^{n_3-1} a_{n_1 n_2 i_3}(x) \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3-i_3-1}}{(n_3-i_3-1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, x_2, \tau_3) d\tau_3 + \\
& + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} a_{i_1 i_2 n_3}(x) \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-i_2-1}}{(n_2-i_2-1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, x_3) d\tau_2 d\tau_1 + \\
& + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_3=0}^{n_3-1} a_{i_1 n_2 i_3}(x) \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!} \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3-i_3-1}}{(n_3-i_3-1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, x_2, \tau_3) d\tau_3 d\tau_1 + \\
& + \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \sum_{i_3=0}^{n_3-1} a_{n_1 i_2 i_3}(x) \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-i_2-1}}{(n_2-i_2-1)!} \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3-i_3-1}}{(n_3-i_3-1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_3 d\tau_2 + \\
& + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \sum_{i_3=0}^{n_3-1} a_{i_1 i_2 i_3}(x) \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \int_{x_3^0}^{x_3} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-i_2-1}}{(n_2-i_2-1)!} \frac{(x_3 - \tau_3)^{n_3-i_3-1}}{(n_3-i_3-1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_3 d\tau_2 d\tau_1,
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
(A_2 b_{n_1 n_2 n_3})(x) = & - \sum_{i_3=0}^{n_3-1} \sum_{l_3=i_3}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3 - x_3^0)^{l_3-i_3}}{(l_3-i_3)!} p_{k_3 l_3} \int_{x_3^0}^{x_3^1} [a_{n_1 n_2 i_3}(x) b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, x_2, \tau_3) \\
& + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} a_{i_1 n_2 i_3}(x) \int_{x_1^0}^{x_1} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!} b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, x_2, \tau_3) d\tau_1 + \sum_{i_2=0}^{n_2-1} a_{n_1 i_2 i_3}(x) \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-i_2-1}}{(n_2-i_2-1)!} \\
& \times b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_2 + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} a_{i_1 i_2 i_3}(x) \int_{x_1^0}^{x_1} \int_{x_2^0}^{x_2} \frac{(x_1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!} \frac{(x_2 - \tau_2)^{n_2-i_2-1}}{(n_2-i_2-1)!} \\
& \times b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3) d\tau_2 d\tau_1] \int_{\tau_3}^{x_3^1} \alpha_{k_3}(s_3) \frac{(s_3 - \tau_3)^{n_3-i_3-1}}{(n_3-i_3-1)!} ds_3 d\tau_3.
\end{aligned} \tag{22}$$

Оператор A_1 , действующий в пространстве $L_p(G)$ линеен, ограничен и является трехмерным вольтерровым интегральным оператором. Поэтому, оператор $(I + A_1)$ имеет ограниченный обратный оператор $B = (I + A_1)^{-1}$, действующий в пространстве $L_p(G)$. Тогда разрешимость уравнения (20) сводится к исследованию разрешимости уравнения

$$b_{n_1 n_2 n_3} + B A_2 b_{n_1 n_2 n_3} = B \psi. \tag{23}$$

Оценим норму $\|A_2\|$ оператора $A_2 : L_p(G) \rightarrow L_p(G)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned}
|(A_2 b_{n_1 n_2 n_3})(x)| \leq & \sum_{i_3=0}^{n_3-1} \sum_{l_3=i_3}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \frac{(x_3^1 - x_3^0)^{l_3-i_3}}{(l_3-i_3)!} |p_{k_3 l_3}| \\
& \times \int_{x_3^0}^{x_3^1} [|a_{n_1 n_2 i_3}(x)| b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, x_2, \tau_3)| + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} |a_{i_1 n_2 i_3}(x)| \int_{x_1^0}^{x_1^1} \frac{(x_1^1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times |b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, x_2, \tau_3)| d\tau_1 + \sum_{i_2=0}^{n_2-1} |a_{n_1 i_2 i_3}(x)| \int_{x_2^0}^{x_2^1} \frac{(x_2^1 - \tau_2)^{n_2-i_2-1}}{(n_2-i_2-1)!} |b_{n_1 n_2 n_3}(x_1, \tau_2, \tau_3)| d\tau_2 \\
& + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} |a_{i_1 i_2 i_3}(x)| \int_{x_1^0}^{x_1^1} \int_{x_2^0}^{x_2^1} \frac{(x_1^1 - \tau_1)^{n_1-i_1-1}}{(n_1-i_1-1)!} \frac{(x_2^1 - \tau_2)^{n_2-i_2-1}}{(n_2-i_2-1)!} \\
& \times |b_{n_1 n_2 n_3}(\tau_1, \tau_2, \tau_3)| d\tau_2 d\tau_1 \int_{\tau_3}^{x_3^1} |\alpha_{k_3}(s_3)| \frac{(x_3^1 - \tau_3)^{n_3-k_3-1}}{(n_3-k_3-1)!} ds_3 d\tau_3. \quad (24)
\end{aligned}$$

В силу неравенств Гельдера и Минковского для любого $b_{n_1 n_2 n_3} \in L_p(G)$, из (24) имеем

$$\|A_2 b_{n_1 n_2 n_3}\|_{L_p(G)} \leq C \|b_{n_1 n_2 n_3}\|_{L_p(G)}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
C = & \sum_{i_3=0}^{n_3-1} \sum_{l_3=i_3}^{n_3-1} \sum_{k_3=0}^{n_3-1} \|\alpha_{k_3}\|_{L(G_3)} \frac{|p_{k_3 l_3}|}{(n_3-k_3-1)!} \frac{(x_3^1 - x_3^0)^{n_3+l_3-k_3-i_3-\frac{1}{p}}}{(l_3-i_3)!((n_3-k_3-1)q+1)^{1/q}} \\
& \times \left(\|a_{n_1 n_2 i_3}^0\|_{L_p(G_3)} + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \|a_{i_1 n_2 i_3}^0\|_{L_p(G_1 \times G_3)} \frac{(x_1^1 - x_1^0)^{n_1-i_1-\frac{1}{p}}}{(n_1-i_1-1)!((n_1-i_1-1)q+1)^{1/q}} \right. \\
& + \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \|a_{n_1 i_2 i_3}^0\|_{L_p(G_2 \times G_3)} \frac{(x_2^1 - x_2^0)^{n_2-i_2-\frac{1}{p}}}{(n_2-i_2-1)!((n_2-i_2-1)q+1)^{1/q}} + \sum_{i_1=0}^{n_1-1} \sum_{i_2=0}^{n_2-1} \|a_{i_1 i_2 i_3}^0\|_{L_p(G)} \\
& \left. \times \frac{(x_1^1 - x_1^0)^{n_1-i_1-\frac{1}{p}}}{(n_1-i_1-1)!((n_1-i_1-1)q+1)^{1/q}} \frac{(x_2^1 - x_2^0)^{n_2-i_2-\frac{1}{p}}}{(n_2-i_2-1)!((n_2-i_2-1)q+1)^{1/q}} \right). \quad (26)
\end{aligned}$$

Следовательно, $\|A_2\| \leq C$. Тогда для оператора BA_2 имеем

$$\|BA_2 b_{n_1 n_2 n_3}\| \leq C \|B\| \|b_{n_1 n_2 n_3}\|.$$

Поэтому, если

$$c_1 = \|B\| C < 1,$$

то уравнение (23) для любого $\psi \in L_p(G)$ имеет единственное решение $b_{n_1 n_2 n_3} \in L_p(G)$.

Очевидно, что при $c_1 < 1$ решение $b_{n_1 n_2 n_3} \in L_p(G)$ уравнение (23) удовлетворяет также условию

$$\|b_{n_1 n_2 n_3}\|_{L_p(G)} \leq \frac{1}{1-c_1} \|B\| \|\psi\|_{L_p(G)}. \quad (27)$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 3. Если $\alpha_{i_3} \neq 0$, $i_3 = \overline{0, n_3-1}$ и $c_1 < 1$, то уравнение (20) для любой функции $\psi \in L_p(G)$ имеет единственное решение $b_{n_1 n_2 n_3} \in L_p(G)$ и для этого решения справедлива оценка (27).

На основе доказанных Теорем 2, 3 получаем, что имеет место

Теорема 4. Если $\alpha_{i_3} \neq 0$, $i_3 = \overline{0, n_3-1}$ и $c_1 < 1$, то задача (1)-(4) для любого $\varphi = (\varphi_{n_1 n_2 n_3}(x), \varphi_{i_1 0 0}(x_2, x_3), i_1 = \overline{0, n_1-1}, \varphi_{n_1 i_2 0}(x_1, x_3), i_2 = \overline{0, n_2-1}, \varphi_{n_1 n_2 i_3}(x_1, x_2), i_3 =$

$\overline{0, n_3 - 1} \in H_p^{(n_1, n_2, n_3)}$ имеет единственное решение $u \in W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)$ и для этого решения справедлива оценка

$$\|u\|_{W_p^{(n_1, n_2, n_3)}(G)} \leq M \|\varphi\|_{H_p^{(n_1, n_2, n_3)}}, \quad M = \text{const} > 0.$$

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литература/References

- [1] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высш. школа, М., 1995, 301 с. [Nakhushhev A. M., *Equations of Mathematical Biology*, Vish. shk., Moscow, 1995 (in Russian), 301 pp.]
- [2] Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П., *Теория волн*, Наука, М., 1979. [Vinogradova M. B., Rudenko O. V., Sukhorukov A. P., *Theory of waves*, Nauka, Moscow, 1979 (in Russian)].
- [3] Васильев Ф. П., *Методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1981. [Vasilyev F. P., *Methods to solution of the extremal problems*, Nauka, Moscow, 1981 (in Russian)].
- [4] Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Васильев В. Г., *Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений*, Новосибирск, 1969. [Laverentyev M. M., Romanov V. G., Vasilyev V. G., *Multidimensional inverse problems for the differential equations*, Novosibirsk, 1969 (in Russian)].
- [5] Showalter R. E., Ting T. W., "Pseudoparabolic partial differential equations", *J. Math. Anal.*, **1**, (1970), 1-26.
- [6] Di Vincenzo R., Villani A., "Sopra un problema ai limiti per un'equazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicità a rappresentazione della soluzione", *Le Matematiche*, 1977, № V, 211-238.
- [7] Солдатов А. П., Шхануков М. Х., "Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка", *ДАН. СССР*, **297**:3 (1987), 547-552. [Soldatov A. P., Shkhanukov M. Kh., "Boundary value problems with A. A. Samarskii's general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations", *Soviet Math. Dokl.*, **36**:3 (1988), 507-511 (in Russian)].
- [8] Жегалов В. Н., "О трехмерной функции Римана", *Сиб. матем. журн.*, **38**:5 (1997), 1074-1079. [Zhegalov V. I., "On the three-dimensional riemann function", *Siberian Math. J.*, **38**:5 (1997), 929-934 (in Russian)].
- [9] Пулькина Л. С., "О разрешимости в L_2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения", *Дифференциальные уравнения*, **36**:2 (2000), 279-280. [Pul'kina L. S., "On the solvability in L_2 of a nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation", *Differ. Equ.*, **36**:2 (2000), 316-318 (in Russian)].
- [10] Нахушев А. М., *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, Наука, М., 2006, 287 с. [Nakhushhev A. M., *Problems with shifts for partial differential equations*, Nauka, Moscow, 2006 (in Russian), 287 pp.]
- [11] Джохадзе О. М., "О трехмерной обобщенной задаче Гурса для уравнения третьего порядка и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения Вольтерры первого рода", *Дифференц. уравнения*, **42**:3 (2006), 385-394. [Dzhokhadze O. M., "On the three-dimensional generalized Goursat problem for a third-order equation, and related general two-dimensional Volterra integral equations of the first kind", *Differ. Equ.*, **42**:3 (2006), 412-421 (in Russian)].
- [12] Уткина Е. А., "Задача со смещениями для трехмерного уравнения Бианки", *Дифференц. уравнения*, **46**:4 (2010), 535-539. [Utkina E. A., "A problem with shifts for the three-dimensional Bianchi equation", *Differ. Equ.*, **46**:4 (2010), 538-542 (in Russian)].

- [13] Юсубов Ш. Ш., “О разрешимости некоторых нелокальных граничных задач для уравнения с доминирующей смешанной производной”, *Вестник Бакинского Университета. Серия физ.-мат. науки*, 2012, № 2, 37-43. [Yusubov Sh. Sh., “On the solvability of some non-local boundary problems for the equations with dominating mixed derivatives”, *News of Baku University. Series of Physico-Mathematical Sciences*, 2012, № 2, 37-43 (in Russian)].
- [14] Макаова Р. Х., “Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016, № 4-1(16), 45-49. [Makaova R. Kh., “The first boundary value problem for the non-homogeneous Hallaire equation”, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2016, № 4-1(16), 45-49 (in Russian)].
- [15] Зикиров О. С., Холиков Д. К., “Об одной задаче для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка”, *Математические заметки СВФУ*, **23**:2 (2016), 19-30. [Zikirov O. S., Kholikov D. K., “On some problem for a loaded pseudoparabolic equation of the third order”, *Mathematical notes of NEFU*, **23**:2 (2016), 19-30 (in Russian)].
- [16] Хубиев К. У., “О математической модели уравнения Аллера”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016, № 4-1(16), 56-65. [Khubiev K. U., “On mathematical models of the Aller equation”, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, 2016 pages 56-65, № 4-1(16) (in Russian)].

MSC 35L35, 35S15, 35L25

Research Article

Non-local problem with integral conditions for the three-dimensional high order hyperbolic equations

Sh. Sh. Yusubov

Baku State University, AZ1148, Z. Khalilov str. 23, Baku, Azerbaijan

E-mail: yusubov_shakir@mail.ru

In the work the solvability of the non-local problem with integral conditions is investigated for the three-dimensional high order hyperbolic equation with dominated mixed derivative. The problem is reduced to the integral equation and existence of the solution is proved by the help of aprior estimations.

Key words: fractional derivative, Bessel operator, Wright function, Bessel function.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-51-62

Original article submitted: 04.08.2020

Revision submitted: 03.11.2020

For citation. Yusubov Sh.Sh. Non-local problem with integral conditions for the three-dimensional high order hyperbolic equations. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **33**: 4, 51-62. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-33-4-51-62

Competing interests. The author declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author contributed to this article. The author is solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by the author.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Yusubov Sh. Sh., 2020

Funding. The work was carried out without financial support.