УДК 519.2

Научная статья

Об уточнениях асимптотического разложения продолжения критических ветвящихся случайных процессов

Ш. Ю. Жураев

Институт Математики имени В. И. Романовского Академии наук Узбекистана,
г. Ташкент, ул. Мирзо Улугбека 85, 100170, Республика Узбекистан.

E-mail: shukurjon4756@gmail.com

В настоящей работе для вероятности продолжения критических ветвящихся случайных процессов получено асимптотическое разложение в предположении о существовании факториальных моментов λ_k при $k = 5, 6, \dots, m, m < \infty$.

Ключевые слова: ветвящийся случайный процесс, вероятность продолжения критических ветвящихся процессов, факториальный момент, производящие функции, вероятность вырождения процесса.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-55-64

Поступила в редакцию: 31.08.2020

В окончательном варианте: 17.09.2020

Для цитирования. Жураев Ш. Ю. Об уточнениях асимптотического разложения продолжения критических ветвящихся случайных процессов // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 32. № 3. С. 55-64. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-55-64

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Жураев Ш. Ю., 2020

1. Введение

Пусть Z_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), ветвящийся случайный процесс с дискретным временем и с одним типом частиц. Введем производящие функции

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P(Z_1 = i) x^i, \quad F_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_n(i) x^i, \quad |x| \leq 1,$$

где

$$P_n(i) = P\{Z_n = i / Z_0 = 1\}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Как известно, для производящих функций имеет место соотношение:

$$F_i(x) = F(F_{i-1}(x)) \quad (1.1)$$

Обычно полагают $\alpha_m = F^{(m)}(1)$ и для первых факториальных моментов вводят обозначения: $\alpha_1 = A$, $\alpha_2 = B$, $\alpha_3 = C$, $\alpha_4 = D$.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

Величина $P_0(n)$ есть вероятность вырождения процесса, начавшегося с одной частицы, к моменту n .

Пусть $Q_n = 1 - P_0(n)$ — вероятность продолжения процесса.

Асимптотическое поведение вероятности Q_n для дискретного времени изучено А. Н. Колмогоровым [1]. Результаты А. Н. Колмогорова для процессов с непрерывным временем получены Б. А. Севастьяновым [4].

Литературный обзор по вопросам предельных и локально предельных теорем, и в частности, уточнение асимптотического разложения для вероятности Q_n коротко изложены в работе С. В. Нагаева и Р. Мухамедхановой [3]. Поэтому мы не останавливаемся на литературном обзоре.

В этой статье изучаются некоторые уточнения теорем которые доказаны в работе [3], по вопросам асимптотического разложения для вероятности Q_n в случае дискретного времени.

Для критических ветвящихся процессов ($A = 1$) в работе [3] доказаны следующие теоремы (см., стр. 96-97):

Теорема 1.1. Если $A = 1, B > 0, C < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$Q_n = \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \quad (1.2)$$

Теорема 1.2. Если $A = 1, B > 0, D < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$Q_n = \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + \frac{4K}{B^2 n^2} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right), \quad (1.3)$$

где K — некоторая постоянная зависящая от вида $F(x)$.

В работе [3], авторы сообщают о том, что их методы доказательства соотношений (1.2)-(1.3) пригодны и для случая, когда существуют факториальные моменты более высокого порядка.

Поэтому мы решили рассмотреть случай, когда существуют факториальные моменты $\alpha_m = F^{(m)}(1) < \infty$ при $m \geq 4$.

2. Основные результаты

Теорема 2.1. Если $A = 1, B, C, D > 0, E < \infty$, то при $n \rightarrow \infty$

$$Q_n = \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} + \frac{4K_5}{B^2 n^2} + \frac{8}{B^3} \left(\frac{C}{3B} - \frac{B}{2} \right)^2 \frac{\ln^2 n}{n^3} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} K_5 = 1 + T & \left[1 + \frac{2}{B} c_1 - \frac{8}{B^3} T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} - \frac{4K_4}{B^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \frac{32}{B^5} T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^2 k}{k^3} \right] + \\ & + \left(\frac{B}{2} T + T_1 \right) \left[1 + \frac{4}{B^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{32}{B^4} T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^3} - \frac{16K_4}{B^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} + \frac{192}{B^6} T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^2 k}{k^4} \right] + \\ & + \left[\frac{B}{2} T_1 + T^2 + \frac{BD}{48} - \frac{E}{120} \right] \left[1 + \frac{8}{B^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} - \frac{96}{B^5} T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^4} - \frac{48K_4}{B^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} + \frac{758}{B^7} T^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^2 k}{k^5} \right] \end{aligned}$$

$$T = \frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}, \quad T_1 = \frac{D}{24} - \frac{BC}{12}$$

$$K_4 = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k + \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6} \right) \left[\frac{2c_1}{B} + \sum_{k=1}^{n-1} q_k + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B} \right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{k^2} \right]$$

$$\rho_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad q_k = o\left(\frac{\ln k}{k^2}\right).$$

Замечание 2.1. В случае существования факториальных моментов α_6, α_7 , и т.д. легко получить асимптотическое разложение типа (2.1). При этом в разных случаях получаются разные постоянные K_6, K_7 , и т.д., которые мало отличаются друг от друга.

Доказательство. В силу (1.1), имеем

$$Q_n = Q_{n-1} - \frac{B}{2}Q_{n-1}^2 + \frac{C}{6}Q_{n-1}^3 - \frac{D}{24}Q_{n-1}^4 + \frac{E}{120}Q_{n-1}^5 + o(Q_{n-1}^5) \quad (2.2)$$

Отсюда, легко получить

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1 - \frac{B}{2}Q_{n-1} + \frac{C}{6}Q_{n-1}^2 - \frac{D}{24}Q_{n-1}^3 + \frac{E}{120}Q_{n-1}^4 + o(Q_{n-1}^4)} = b_{n-1} + \frac{B}{2} + TQ_{n-1} +$$

$$+ \left[\frac{B}{2}T + T_1 \right] Q_{n-1}^2 + \left[\frac{B}{2} \left(\frac{B}{2}T + T_1 \right) + \frac{BD}{48} - \frac{E}{120} - \frac{C}{6}T \right] Q_{n-1}^3 + o(Q_{n-1}^3) \quad (2.3)$$

где

$$T = \frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}, \quad T_1 = \frac{D}{24} - \frac{BC}{12}. \quad (2.4)$$

Из формулы (2.3), вытекает

$$b_n = \frac{Bn}{2} + T \sum_{k=0}^{n-1} Q_k + \left[\frac{B}{2}T + T_1 \right] \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2 + \left[\frac{B}{2}T_1 + T^2 + \frac{BD}{48} - \frac{E}{120} \right] \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^3 + o\left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^3\right) \quad (2.5)$$

Рассмотрим $\sum_{k=0}^{n-1} Q_k, \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2, \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^3$. Подставляя вместо Q_k его выражение (1.3), получаем

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q_k = \frac{2}{B} \ln n + 1 + \frac{2}{B}c_1 - \frac{8}{B^3}T \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{k^2} - \frac{4K}{B^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} + \frac{32}{B^5}T^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln^2 k}{k^3} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right). \quad (2.6)$$

Аналогично

$$Q_n^2 = \frac{4}{B^2n^2} - \frac{32}{B^4}T \frac{\ln n}{n^3} - \frac{16K}{B^3n^3} + \frac{192}{B^6}T^2 \frac{\ln^2 n}{n^4} + O\left(\frac{\ln n}{n^4}\right) \quad (2.7)$$

и

$$Q_n^3 = \frac{8}{B^3n^3} - \frac{96}{B^5}T \frac{\ln n}{n^4} - \frac{48K}{B^4n^4} + \frac{758}{B^7}T^2 \frac{\ln^2 n}{n^5} + O\left(\frac{\ln n}{n^5}\right) \quad (2.8)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^2 = 1 + \frac{4}{B^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} - \frac{32}{B^4}T \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{k^3} - \frac{16K}{B^3} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^3} + \frac{192}{B^6}T^2 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln^2 k}{k^4} + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2.9)$$

Из формул (2.3)-(2.9) получаем

$$b_n = \frac{Bn}{2} + \frac{2}{B}T \ln n + K_5 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

где K_5 определена в теореме 2.1 и откуда следует утверждение теоремы. $\square$

Переходим теперь рассмотрению случая, когда существуют факториальные моменты $\alpha_k < \infty$, где $k = 4, 5, \dots, m$, $m < \infty$.

Теорема 2.1. Если $A = 1$, $B > 0$, $\alpha_k < \infty$, $k \geq 4$, то при $n \rightarrow \infty$

$$Q_n = \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B}\right) \frac{\ln n}{n^2} - \frac{4K_m}{B^2 n^2} + \frac{2}{B} \left(1 - \frac{2C}{3B^2}\right)^2 \frac{\ln^2 n}{n^3} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) \quad (2.10)$$

где

$$K_m = 1 + L_1 + L_1 \left[\frac{2c_1}{B} + \frac{2}{B} \left(\frac{2C}{3B^2} - 1\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] + \sum_{j=2}^{m-2} L_j (1 + I_j) + \varepsilon_n (1 + I_{m-2}) \quad (2.11)$$

а коэффициенты L_i , $i = 1, 2, \dots, m-1$, зависят только от факториальных моментов $\alpha_k < \infty$, $k = 2, 3, \dots, m$, $c_1 = 0,577216\dots$ — постоянная Эйлера, $I_j = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^j$, $j = 2, 3, \dots, m-2$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Так как факториальные моменты $\alpha_k < \infty$, $k = 2, 3, \dots, m$, $m < \infty$, то по формуле Тейлора имеем

$$Q_n = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \frac{\alpha_k}{k!} Q_{n-1}^k + o(Q_{n-1}^m) = Q_{n-1} \left[\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \frac{\alpha_k}{k!} Q_{n-1}^{k-1} + o(Q_{n-1}^{m-1}) \right] \quad (2.12)$$

полагая $Q_n = \frac{1}{b_n}$ из (2.12) получаем

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1 - \sum_{i=2}^m (-1)^{i-1} Q_{n-1}^{i-1} \frac{\alpha_i}{i!}} = b_{n-1} + \sum_{j=0}^{m-1} L_j Q_{n-1}^j + o(Q_{n-1}^{m-1}) \quad (2.13)$$

где коэффициенты L_j зависят от факториальных моментов $\alpha_k < \infty$, $k = 2, 3, \dots, m$.

Однако, найти все коэффициенты L_j в явном виде очень сложный вопрос. Но выполняя деление с остатком можно найти некоторые коэффициенты L_j . Например, коэффициенты L_0, L_1, L_2, L_3 имеют вид:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{B}{2}, \quad L_1 = \frac{B^2}{4} - \frac{C}{6}, \\ L_2 &= \left[\frac{D}{24} - \frac{BC}{12} + \frac{B}{2} \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6} \right) \right], \\ L_3 &= \left[\frac{BD}{48} - \frac{E}{120} - \frac{C}{6} \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6} \right) \right] + \frac{B}{2} \left[\frac{D}{24} - \frac{BC}{12} + \frac{B}{2} \left(\frac{B^2}{4} - \frac{C}{6} \right) \right] \end{aligned}$$

Из (2.13) получаем

$$b_n = 1 + L_0 n + L_1 \sum_{k=0}^{n-1} Q_k + \sum_{j=2}^{m-2} L_j \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^j + o\left(\sum_{k=0}^{n-1} Q_k^{m-2}\right) \quad (2.14)$$

Так как $\sum_{k=1}^{n-1} Q_k^j$ является частичной суммой сходящегося ряда $I_j = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^j$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1} Q_k^j = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^j - \sum_{k=n}^{\infty} Q_k^j = I_j - \sum_{k=n}^{\infty} Q_k^j \quad (2.15)$$

Таким образом, нам следует исследовать поведение суммы в правой части (2.14), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{m-2} L_j \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^j &= \sum_{j=2}^{m-2} L_j + \sum_{j=2}^{m-2} L_j \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^j = \sum_{j=2}^{m-2} L_j + \sum_{j=2}^{m-2} L_j I_j - \sum_{j=2}^{m-2} L_j \sum_{k=n}^{\infty} Q_k^j = \\ &= \sum_{j=2}^{m-2} L_j (1 + I_j) - \sum_{j=2}^{m-2} L_j \sum_{k=n}^{\infty} Q_k^j \end{aligned} \quad (2.16)$$

В силу теоремы (1,1)-(1,2), имеем

$$Q_k^j = \left(\frac{2}{B}\right)^j \frac{(1 + \gamma_k)^j}{k^j}, \quad \gamma_k = \left(\frac{2C}{3B^2} - 1\right) \frac{\ln k}{k} (1 + o(1)) \quad (2.17)$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона имеем

$$Q_k^j = \left(\frac{2}{B}\right)^j \sum_{l=0}^j c_j^l \gamma_k^l \frac{1}{k^j} = \left(\frac{2}{B}\right)^j \sum_{l=0}^j c_j^l \frac{\gamma_k^l}{k^j} \quad (2.18)$$

Так как $\gamma_k \sim a \frac{\ln k}{k}$, при $k \rightarrow \infty$, то в равенстве (2.18) мы оставляем слагаемые при $l = 0, 1, 2$:

$$Q_k^j = \left(\frac{2}{B}\right)^j \left(\frac{1}{k^j} + ja \frac{\ln k}{k^{j+1}} + O\left(\frac{j(j-1)}{2} a^2 \frac{\ln^2 k}{k^{j+2}}\right) \right)$$

Из (2.16), имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty} Q_k^j = \left(\frac{2}{B}\right)^j \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^j} + ja \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{j+1}} + O\left(\frac{j(j-1)}{2} a^2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln^2 k}{k^{j+2}}\right) \right) \quad (2.19)$$

Так как сумма $R_{nj} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^j}$ является остаточным членом дзета-функции Римана $\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^j}$, то $R_{nj} = O\left(\frac{1}{n^{j-1}}\right)$

$$\sum_{k=n}^{\infty} Q_k^j = \left(\frac{2}{B}\right)^j \cdot O\left(\frac{1}{n^{j-1}}\right) = O\left(\frac{1}{n^{j-1}}\right)$$

Из (2.16) следует, что

$$\sum_{j=2}^{m-2} L_j \sum_{k=0}^{n-1} Q_k^j = \sum_{j=2}^{m-2} L_j (1 + I_j) + \sum_{j=2}^{m-2} L_j R_{nj} \quad (2.20)$$

где $I_j = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^j$, $R_{nj} = O\left(\frac{1}{n^{j-1}}\right)$.

Следовательно, равенство (2.14) можно переписать в виде

$$b_n = 1 + L_0 n + L_1 \sum_{k=0}^{n-1} Q_k + \sum_{j=2}^{m-2} L_j (1 + I_j) + P_{mn} + \varepsilon_n (1 + I_{m-2}) + o\left(\frac{1}{n^{m-3}}\right) \quad (2.21)$$

здесь

$$\varepsilon_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, P_{mn} = \sum_{j=2}^{m-2} L_j R_{nj}.$$

Теперь оценим сумму $\sum_{k=0}^{n-1} Q_k$:

В силу теоремы 1.1

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} Q_k &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} Q_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2(1 + \gamma_k)}{Bk} = 1 + \frac{2}{B} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1 + \gamma_k}{k} = \\ &= 1 + \frac{2}{B} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\gamma_k}{k} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Известно, что $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = c_1 + \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right)$, где $c_1 = 0,577216$ — постоянная Эйлера.

$$\sum_{k=1}^{n-1} Q_k = \frac{2}{B} \left(c_1 + \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) + \frac{2}{B} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\gamma_k}{k} \quad (2.23)$$

В силу (2.17) имеем

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\gamma_k}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \left(\frac{2C}{3B^2} - 1 \right) \frac{\ln k}{k} (1 + o(1)) = \left(\frac{2C}{3B^2} - 1 \right) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{k^2} (1 + o(1)) \quad (2.24)$$

Так как

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} - \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2} = K - R_n,$$

То, из задачи математического анализа ([5], задача 2623)

$$\int_n^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx < R_n < \frac{\ln n}{n^2} + \int_n^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\int_n^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{\ln n + 1}{n}$$

и, следовательно,

$$\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} < R_n < \frac{\ln n}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right) + \frac{1}{n}$$

т.е.

$$R_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad (2.25)$$

Из соотношений (2.24) и (2.25) получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\gamma_k}{k} = \left(\frac{2C}{3B^2} - 1 \right) K + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad (2.26)$$

где $K = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$.

Следовательно, из (2.23) и (2.26) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} Q_k &= \frac{2}{B} c_1 + \frac{2}{B} \ln n + O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2K}{B} \left(\frac{2C}{3B^2} - 1 \right) + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = \\ &= \frac{2}{B} \ln n + T_1 + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

где

$$T_1 = \frac{2}{B} c_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{2K}{B} \left(\frac{2C}{3B^2} - 1 \right).$$

Положив (2.27) в (2.22), равенство (2.21) перепишем в виде:

$$b_n = \frac{Bn}{2} + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{3B} \right) \ln n + K_m + P_{mn} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) + o\left(\frac{1}{n^{m-3}}\right) \quad (2.28)$$

где

$$K_m = 1 + L_1 + L_1 T_1 + \sum_{j=2}^{m-2} L_j (1 + I_j) + \varepsilon_n (1 + I_{m-2}).$$

По условию теоремы $m \geq 4$ и из (2.21) и (2.22) имеем

$$\begin{aligned} P_{mn} &= \sum_{j=2}^{m-2} L_j R_{nj} = L_2 R_{n2} + L_3 R_{n3} + \dots + L_{m-2} R_{n(m-2)} = O\left(\frac{L_2}{n}\right) + O\left(\frac{L_3}{n^2}\right) + \dots + \\ &+ O\left(\frac{L_{m-2}}{n^{m-3}}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Отсюда из (2.28), получаем

$$b_n = \frac{Bn}{2} + \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{3B} \right) \ln n + K_m + O\left(\frac{\ln n}{n}\right) \quad (2.29)$$

Так как $Q_n = \frac{1}{b_n}$ то выполняя деление с остатком, получаем

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} - \frac{4K_m}{B^2 n^2} + \frac{2}{B} \left(1 - \frac{2C}{3B^2} \right)^2 \frac{\ln^2 n}{n^3} + \frac{8K_m}{B^2} \left(1 - \frac{2C}{3B^2} \right) \frac{\ln n}{n^3} + \\ &+ \frac{8K_m^2}{B^3 n^3} + \frac{1}{b_n} \left(a_1 \frac{\ln^3 n}{n^3} + a_2 \frac{\ln^2 n}{n^3} + a_3 \frac{\ln n}{n^3} - \frac{8K_m^3}{B^3 n^3} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \right) = \frac{2}{Bn} + \left(\frac{4C}{3B^3} - \frac{2}{B} \right) \frac{\ln n}{n^2} - \\ &- \frac{4K_m}{B^2 n^2} + \frac{2}{B} \left(1 - \frac{2C}{3B^2} \right)^2 \frac{\ln^2 n}{n^3} + O\left(\frac{\ln n}{n^3}\right) \end{aligned}$$

где a_1, a_2, a_3 — некоторые постоянные, зависящих от B, C, K_m .

Теорема 2.2 доказана. $\square$

3. Ветвящиеся процессы с непрерывным временем

Пусть $\mu(t)$, $\mu(0)$ — ветвящиеся процессы с непрерывным временем.

$P_k(t) = P\{\mu(t) = k / \mu(0) = 1\}$ — есть распределение этого процесса.

Пусть $F(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) x^k$, $|x| \leq 1$ производящая функция распределения $\{P_k(t)\}$.

Хорошо известно, что для производящей функции $F(t, x)$ справедливо уравнение

$$F(t+s, x) = F(t, F(s, x)), \quad |x| \leq 1 \quad (3.1)$$

с граничным условием $F(0, x) = x$.

Обычно, для ветвящихся процессов с непрерывным временем полагают, что [6]:

$$P_k(t + \Delta t) = \delta_{1k} p_k \Delta t + \eta(\Delta t) \Delta t \quad (3.2)$$

где $\eta_k(\Delta t) \rightarrow 0$ при $\Delta t \rightarrow 0$, δ_{1k} — символ Кронеккера, т.е. $\delta_{1k} = 1$, если $k = 1$, $\delta_{1k} = 0$ если $k \neq 1$.

Если вероятность $P_k(t)$ удовлетворяет (3.2), то при $|x| \leq 1$ справедливо

$$F(t, x) = x + f(x) \Delta t + o(\Delta t), \quad \Delta t \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

где $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$, p_k — постоянные, определяемые (3.2).

Положим, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0$. Величины $a = f'(1)$, $b = f''(1)$, $c = f'''(1)$, $d = f^{(IV)}(1)$ и т.д. $\alpha_m = f^{(m)}(1)$ называются факториальными моментами.

В силу (3.1) и (3.2) при $|x| \leq 1$ доказываются, что для процессов с непрерывным временем, производящая функция $F(t, x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = f[F(t, x)] \quad (3.4)$$

и граничным условием $F(0, x) = x$.

Пусть $R(t, x) = 1 - F(t, x)$ и $Q(t) = R(t, 0) = 1 - F(t, 0)$ — вероятность продолжения ветвящегося процесса $\mu(t)$, $0 \leq t < \infty$.

В.П. Чистяков [7], пользуясь результатами Б.А. Севастьянова [4], при условии конечности $a = 0, b > 0, c < \infty, d < \infty$ получил асимптотическое разложение при $t \rightarrow \infty$ для $R(t, x)$ и, в частности, для вероятности $Q(t)$ продолжения процесса.

Лемма 3.1. (Чистяков В.П. [7]). Если $a = 0$, факториальные моменты $b > 0, c, d$ существуют и $x \in \{x : |x| \leq 1, |x - 1| \geq r > 0\}$, то при $t \rightarrow \infty$

$$R(t, x) = \frac{2}{bt} + \frac{4c \ln t}{3b^2 t^2} + \frac{4K(x)}{b^2 t^2} + O\left(\frac{\ln^2 t}{t^3}\right), \quad (3.5)$$

где $K(x)$ — некоторая функция от x , зависящая от вида $f(x)$.

Следствие. В предположениях леммы 3.1 при $t \rightarrow \infty$

$$Q(t) = \frac{2}{bt} + \frac{4c \ln t}{3b^2 t^2} + \frac{4K(0)}{b^2 t^2} + O\left(\frac{\ln^2 t}{t^3}\right) \quad (3.6)$$

При доказательстве леммы 3.1, Чистяков В.П. получил соотношение

$$-\frac{dR(t, x)}{dt} = f(1 - R) = \frac{b}{2} R^2 - \frac{c}{6} R^3 + \frac{\bar{d}}{24} R^4 \quad (3.7)$$

где $|\bar{d}| \leq d$, т.е. $\bar{d} = d + \varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$ и

$$\frac{d \left[\frac{1}{R(t,x)} - \frac{bt}{2} \right]}{dt} = -\frac{c}{6} R(t,x) + \frac{\bar{d}}{24} R^2(t,x). \quad (3.8)$$

В этой работе мы распространим результаты [7] для вероятности $Q(t)$, когда существуют факториальные моменты $\alpha_k = f^{(k)}(1) < \infty$, где $k = 4, 5, 6, \dots, m$, $m < \infty$.

Теорема 3.1. Если $a = 0$, $\alpha_k < \infty$, $k = 4, 5, \dots, m$, $b > 0$ то при $t \rightarrow \infty$

$$Q(t) = \frac{2}{bt} + \frac{4c \ln t}{3b^3 t^2} - \frac{4K_m}{b^2 t^2} + \frac{8c^2 \ln^2 t}{9b^5 t^3} - \frac{8(3K_m(1+4c) + c^2)}{9b^4} \frac{\ln t}{t^3} + o\left(\frac{\ln t}{t^3}\right) \quad (3.9)$$

где

$$K_m = 1 - \frac{c}{6} (N_1 + t_3) + \sum_{n=4}^m (-1)^{n-2} \frac{\alpha_n}{n!} (t_n + N_{n-2}) + \varepsilon_1(t) (t_m + N_{m-2}),$$

$\varepsilon_1(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, а

$$N_1 = \frac{4c}{3b^2} \left(\frac{1 + \ln t_0}{t_0} \right), \quad N_{n-2} = \int_{t_0}^{\infty} Q^{n-2}(\tau) d\tau, \quad t_n = \int_0^{t_0} Q^{n-2}(\tau) d\tau,$$

$t_0 > 0$ достаточно большое, но фиксировано, $0 < t_m \leq t_{m-1} \leq \dots \leq t_4 \leq t_3 \leq t_0$.

Доказательство. Ясно, что если $\alpha_m < \infty, b > 0, a = 0$, то для вероятности продолжения $Q(t)$ ветвящихся процессов с непрерывным временем равенства (3.7) и (3.8) имеет вид:

$$-\frac{dQ(t)}{dt} = f(1 - Q(t)) = \frac{b}{2} Q^2(t) - \frac{c}{6} Q^3(t) + \dots + (-1)^m \frac{\alpha_m}{m!} Q^m(t) + o(Q^m(t)) \quad (3.10)$$

$$\frac{d \left[\frac{1}{Q(t)} - \frac{bt}{2} \right]}{dt} = \sum_{n=3}^m (-1)^{n-2} \frac{\alpha_n}{n!} Q^{n-2}(t) + o(Q^{m-2}(t)) \quad (3.11)$$

Проинтегрируем (3.11) в пределах от 0 до t

$$\frac{1}{Q(t)} - 1 - \frac{bt}{2} = \sum_{n=3}^m (-1)^{n-2} \frac{\alpha_n}{n!} \int_0^t Q^{n-2}(\tau) d\tau + o\left(\int_0^t Q^{m-2}(\tau) d\tau\right) \quad (3.12)$$

Таким образом, нам нужно оценить интегралы

$$I_n = \int_0^t Q^{n-2}(\tau) d\tau, \quad n = 4, 5, \dots, m, \quad m < \infty$$

Выберем постоянную $t_0 > 0$ достаточно большим и I_n перепишем в виде

$$I_n = \int_0^t Q^{n-2}(\tau) d\tau = \int_0^{t_0} Q^{n-2}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t Q^{n-2}(\tau) d\tau = I_{n1} + I_{n2}. \quad (3.12)$$

В силу (3.12) $Q(t) = 1 - P_0(t) + o(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$ и $Q(0) = 1$, т.е. $Q(t)$ — непрерывно при $t = 0$.

Кроме того, $Q(t)$ ограничена и неотрицательно, монотонно убывает. Поэтому для интеграла I_{n1} можно применить следующую теорему о среднем (см. например, [5], стр. 196-197.):

- 1) Если функция $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и интегрируемы на сегменте $[\alpha, \beta]$;
- 2) $\varphi(x)$ монотонно убывающая и неотрицательная, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(x) \varphi(x) dx = \varphi(\alpha + 0) \int_{\alpha}^{\xi} \psi(x) dx, \quad \alpha \leq \xi \leq \beta \quad (3.14)$$

Полагая $\psi(x) = 1, \varphi(x) = Q(x), [\alpha, \beta] = [0, t_0]$, в силу (3.14) при $n = 3, 4, \dots, m$, имеем

$$I_{n1} = \int_0^{t_0} Q^{n-2}(\tau) d\tau = Q^{n-2}(+0) \int_0^{t_n} d\tau = t_n, \quad 0 < t_n \leq t_0 \quad (3.15)$$

Легко заметить, что $0 < t_m \leq t_{m-1} \leq \dots \leq t_3 \leq t_0$.

Переходим к оценке интегралов I_{n2} в (3.13). Так как

$$Q(t) = \frac{2(1 + \gamma_t)}{bt}$$

где

$$\gamma_t = \frac{2c \ln t}{3bt} (1 + o(1))$$

, то при $n = 3$ имеем

$$\begin{aligned} I_{32} &= \int_{t_0}^t Q(\tau) d\tau = \frac{2}{b} \int_{t_0}^t \frac{1 + \gamma_\tau}{\tau} d\tau = \frac{2}{b} \int_{t_0}^t \frac{d\tau}{\tau} + \frac{4c}{3b^2} \int_{t_0}^t \frac{\ln \tau}{\tau^2} d\tau (1 + o(1)) = \\ &= \frac{2}{b} \ln \frac{t}{t_0} - \frac{4c}{3b^2} \frac{\ln t}{t} (1 + o(1)) + N_1 \end{aligned}$$

где

$$N_1 = \frac{4c}{3b^2} \frac{1 + \ln t_0}{t_0} + o(1).$$

Таким образом,

$$I_{32} = \int_{t_0}^t Q(\tau) d\tau = \frac{2}{b} \ln \frac{t}{t_0} - \frac{4c}{3b^2} \frac{\ln t}{t} (1 + o(1)) + N_1 \quad (3.16)$$

Аналогично, поступая при $n = 4, 5, \dots, m$, легко получаем

$$I_{n2} = \int_{t_0}^t Q^{n-2}(\tau) d\tau = N_{n-2} - \left(\frac{2}{b}\right)^{n-2} \frac{1}{(n-3)t^{n-3}} (1 + o(1)) \quad (3.17)$$

где

$$N_{n-2} = \int_{t_0}^{\infty} Q^{n-2}(\tau) d\tau, \quad n = 4, 5, \dots, m.$$

Из соотношений (3.15)-(3.17) получаем

$$I_n = t_n + N_{n-2} - \left(\frac{2}{b}\right)^{n-2} \frac{1}{(n-3)t^{n-3}} (1 + o(1)) \quad (3.18)$$

Подставляя (3.16) и (3.18) в (3.12) и учитывая $\frac{t}{t_0} \sim t$ при $t \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\frac{1}{Q(t)} = \frac{bt}{2} - \frac{c}{3b} \ln t + K_m + \beta_t - L_{mt} + o\left(\frac{1}{t^{m-3}}\right), \quad (3.19)$$

где K_m определена в теореме 3.1, а

$$\beta_t = \frac{4c^2}{18b^2} \frac{\ln t}{t} (1 + o(1)) = \frac{2c^2}{9b^2} \frac{\ln t}{t} (1 + o(1)) \quad (3.20)$$

$$L_{mt} = \sum_{n=4}^m (-1)^{n-2} \frac{\alpha_n}{n!} \frac{2^{n-2}}{(n-3)b^{n-2}t^{n-3}} (1 + o(1)). \quad (3.21)$$

Нетрудно заметить, что при $t \rightarrow \infty$

$$L_{mt} = \frac{d}{6bt} (1 + o(1)) \quad (3.22)$$

Из соотношений (3.19)-(3.22) имеем

$$\frac{1}{Q(t)} = \frac{bt}{2} - \frac{c}{3b} \ln t + K_m + \frac{2c^2}{9b^2} \frac{\ln t}{t} (1 + o(1)) \quad (3.23)$$

Теперь, выполняя деление с остатком, хотя громоздко но несложно, из (3.23) получаем

$$Q(t) = \frac{2}{bt} + \frac{4c}{3b^3} \frac{\ln t}{t^2} - \frac{4K_m}{b^2t^2} + \frac{8c^2 \ln^2 t}{9b^5t^3} - \frac{8K_m^2}{b^3t^3} - \frac{8K_m(1+4c) \ln t}{3b^4t^3} + \frac{R_t}{\frac{1}{Q(t)}} \quad (3.24)$$

где остаток R_t имеет порядок

$$R_t = -\frac{4c^2}{9b^3} \frac{\ln t}{t^2} (1 + o(1))$$

Учитывая, что

$$Q(t)R_t = \frac{2}{bt} \left(-\frac{4c^2}{9b^3} \frac{\ln t}{t^2}\right) (1 + o(1)) = -\frac{8c^2}{9b^4} \frac{\ln t}{t^3} (1 + o(1)) \quad (3.25)$$

из (3.24) и (3.25) получаем утверждение теоремы 3.1.

Теорема доказана. $\square$

Заключение

Полученные асимптотические разложения вероятности продолжения критических случайных ветвящихся процессов использовались в случайных ветвящихся процессах с k факториальным моментом производящих функций, в которых K – постоянные

также находятся в общем случае. Эти асимптотические разложения играют важную роль при доказательстве предельных и локально предельных теорем для случайных ветвящихся процессов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

- [1] Колмогоров А. Н., “К решению одной биологической задачи”, *Изв. НИИ матем. и мех. Томского Университета*, **22:1** (1938), 1-12.
- [2] Севастьянов Б. А., “Теория ветвящихся случайных процессов”, *УМН*, **6:6(46)** (1951), 47-99. [Sevast'yanov B. A., “Teoriya vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov”, *UMN*, **6:6(46)** (1951), 47-99].
- [3] Нагаев А. В., Мухаммедханова Р., “Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся случайных процессов”, *Предельные теоремы и статистические выводы*, Фан, Ташкент, 1966, 90-112. [Nagayev A. V., Mukhammedkhanova R., “Nekotoryye predel'nyye teoremy iz teorii vetvyashchikhsya sluchaynoye protsessov”, *Predel'nyye teoremy i statisticheskiye vyvody*, Fan, Tashkent, 1966, 90-112].
- [4] Севастьянов Б. А., *Ветвящиеся процессы*, Наука, М., 1971, 436 с. [Sevast'yanov B. A., *Vetvyashchiyesya protsessy*, Nauka, M., 1971, 436 pp.]
- [5] Демидович Б. П., *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*, Наука, М., 1977. [Demidovich B. P., *Sbornik zadach i uprazhneniy po matematicheskomu analizu*, Nauka, M., 1977].
- [6] Яглом А. М., “Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов”, *ДАН СССР*, **56:8** (1947), 795-798. [Yaglom A. M., “Nekotoryye predel'nyye teoremy teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov”, *DAN SSSR*, **56:8** (1947), 795-798].
- [7] Чистяков В. П., “Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов”, *Теория вероятностей и ее применения*, **2:3** (1957), 360-374. [Chistyakov V. P., “Lokal'nyye predel'nyye teoremy teorii vetvyashchikhsya sluchaynykh protsessov”, *Teoriya veroyatnostey i yeye primeneniya*, **2:3** (1957), 360-374].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Колмогоров А. Н. К решению одной биологической задачи // Изв. НИИ матем. и мех. Томского Университета. 1938. Т. 22. №1. С. 1-12.
- [2] Севастьянов Б. А. Теория ветвящихся случайных процессов // УМН. 1951. Т. 6. № 6(46). С. 47-99.
- [3] Нагаев А. В., Мухаммедханова Р. Некоторые предельные теоремы из теории ветвящихся случайных процессов. Предельные теоремы и статистические выводы. Ташкент: Фан, 1966, С. 90-112.
- [4] Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.
- [5] Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1977.
- [6] Яглом А. М. Некоторые предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов // ДАН СССР. 1947. Т. 56. №8. С. 795-798.
- [7] Чистяков В. П. Локальные предельные теоремы теории ветвящихся случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1957. Т. 2. №3. С. 360-374.

MSC 60J80

Research Article

On refinements of the asymptotics expansion of the continuation of critical branching random processes

Sh. Yh. Jurayev

Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy, Academy of Sciences of Uzbekistan, Academy of Sciences of Uzbekistan.

E-mail: shukurjon4756@gmail.com

In this paper, an asymptotic expansion is obtained for the probability of continuation of critical branching processes under the assumptions of the existence of factorial moments λ_k at $k = 5, 6, \dots, m, m < \infty$.

Key words: branching random process, probability of continuation, critical branching processes, factorial moments, generating functions, probability of degeneration of the process.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-55-64

Original article submitted: 31.08.2020

Revision submitted: 17.09.2020

For citation. Jurayev Sh. Yh. On refinements of the asymptotics expansion of the continuation of critical branching random processes. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **32**: 3, 55-64. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-55-64

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Acknowledgments. The authors are deeply grateful to the referee for a number of comments that contributed to the improvement of the article.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Jurayev Sh. Yh., 2020

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors