МАТЕМАТИКА

УДК 519.622.2

Научная статья

Численное решение краевой задачи для нагруженного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями

В. М. Абдуллаев^{1,2}

¹ Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, AZ1010, г. Баку, пр-т Азадлыг, 20

² Институт систем управления НАН Азербайджана, AZ114, г. Баку, ул. Вахабзаде, 9

E-mail: vaqif_ab@rambler.ru

В работе с использованием метода прямых исследуется численное решение краевой задачи относительно нагруженного параболического уравнения с нелокальными краевыми условиями. Получены расчетные формулы и приводится алгоритм для решения задачи. Приведены результаты численного решения двух тестовых задач, иллюстрирующие эффективность предложенного подхода.

Ключевые слова: нагруженные дифференциальные уравнения, нелокальные условия, метод прямых, перенос краевых условий.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-15-28

Поступила в редакцию: 05.08.2020

В окончательном варианте: 28.09.2020

Для цитирования. Абдуллаев В. М. Численное решение краевой задачи для нагруженного параболического уравнения с нелокальными граничными условиями // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 32. № 3. С. 15-28. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-15-28

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Абдуллаев В. М., 2020

Введение

Дифференциальные уравнения, в которых участвуют значения искомой функции в некоторых заданных точках, поверхностях (точечные, поверхностные нагружения) называют нагруженными [1]-[4]. Нагруженные дифференциальные уравнения описывают процессы, в которых их состояние в какой-либо точке и/или в какой-либо момент может оказывать влияние на весь процесс в целом. Такими уравнениями описываются процессы в биологии, экологии, подземной гидрогазодинамики. Нелокальность условий обусловлена практической невозможностью производить замеры или воздействовать на процесс в отдельно взятой точке распределенного в пространстве объекта или мгновенно во времени [5]-[7].

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

К нагруженным уравнениям приводят также математические постановки задач оптимального управления с обратной связью [8], в которых обратная связь происходит дискретно в отдельные моменты времени или для объектов с распределенными в пространстве параметрами с отдельными его точками [9, 10].

В работах [11, 12] исследованы вопросы существования, единственности решения различных классов задач, описываемых нагруженными дифференциальными уравнениями. В работах [7, 12] для нагруженных систем, описываемых в достаточно общем виде уравнениями с обыкновенными и частными производными параболического типа, исследованы разностные аппроксимирующие задачи, получены априорные оценки для их решений и доказана их сходимость к решению непрерывных задач. В работах [7, 12] для решения разностных уравнений при нагружении по пространственной переменной предлагается использовать методы прогонки [13], но каких-либо конкретных схем и результатов численного решения не приводится.

В работе исследовано применение различных схем конечноразностной аппроксимации краевой задачи относительно точно нагруженного параболического уравнения [14]. В работах [7, 15] исследовалось численное решение нагруженных параболических уравнений при нагружении по пространственной переменной и была предложена схема решения соответствующих конечноразностных аппроксимирующих задач.

В работах [11, 16, 17, 18] исследовались проблемы, связанные с численным решением обратных задач и задач оптимального управления процессами, описываемых нагруженными дифференциальными уравнениями.

В данной работе на примере нагруженного параболического уравнения исследуется подход к численному решению соответствующих краевых задач, основанный на применении схем метода прямых.

Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача, описываемая нагруженным уравнением параболического типа:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \sum_{s=1}^k B^s(x,t)u(x_s,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega; \quad (1)$$

при начальном условии

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

и нелокальных граничных условиях:

$$\alpha_{11}(t)u(0,t) + \alpha_{12}(t)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \gamma_{11}(t)u(l,t) + \gamma_{12}(t)\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \xi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$\alpha_{21}(t)u(0,t) + \alpha_{22}(t)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \gamma_{21}(t)u(l,t) + \gamma_{22}(t)\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \xi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

Здесь $u(x,t)$ – искомая функция, определенная в области $\Omega = \{0 < x < l, 0 < t \leq T\}$; t и x являются соответственно временной и фазовой координатами; T и l – заданные положительные числа; $x_s \in (0,l)$, $s = 1, 2, \dots, k$ – заданные точки нагружения; $f(x,t)$, $B^s(x,t)$, $s = 1, 2, \dots, k$, $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_{ij}(t)$, $\gamma_j(t)$, $i, j = 1, 2$ – заданные непрерывно-дифференцируемые по своим аргументам функции на отрезке $[0, T]$, а $\varphi(x)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая функция на отрезке $[0, l]$.

Требуется определить непрерывно-дифференцируемую по $t \in [t_0, T]$ и дважды непрерывно-дифференцируемую по $x \in (0, l)$ функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую условиям (1) - (4).

В работе [12] исследованы вопросы существования, единственности решения для нагруженного параболического уравнения для различных видов краевых условий. Приведены схемы конечно-разностной аппроксимации для нагруженных дифференциальных уравнений параболического типа, показана их сходимости к точному решению. Подобные схемы исследования могут быть использованы и для конкретно рассматриваемой задачи.

Метод решения

На отрезке $[0, T]$ возьмем точки $t_j = j\tau$, $\tau = T/N$ и проведем прямые $t = t_j$, $j = 0, 1, \dots, N$. Обозначая через $U^j(x) = u(x, t_j)$ и заменяя $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_j}$ разностным отношением, получим следующие нагруженные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 U^j(x)}{dx^2} = \frac{1}{\tau} U^j(x) - \sum_{s=1}^k B_s^j(x) U^j(x_s) - \frac{1}{\tau} U^{j-1}(x) - f^j(x), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad U^0(x) = \varphi(x). \quad (5)$$

В силу (3)-(4) для этой системы уравнений имеются нелокальные граничные условия:

$$\alpha_{11}^j U^j(0) + \alpha_{12}^j \frac{dU^j(0)}{dx} + \gamma_{11}^j U_j(l) + \gamma_{12}^j \frac{dU^j(l)}{dx} = \xi_1^j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

$$\alpha_{21}^j U^j(0) + \alpha_{22}^j \frac{dU^j(0)}{dx} + \gamma_{21}^j U_j(l) + \gamma_{22}^j \frac{dU^j(l)}{dx} = \xi_2^j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Для численного решения задачи (2)-(4) предлагается использовать следующий подход, использующий операцию сдвига неразделенных условий [19, 20], который обобщает известную процедуру переноса краевых условий [21].

Определение. Будем говорить, что функции $\alpha_1^j(x)$, $\alpha_2^j(x)$, $\gamma_1^j(x)$, $\gamma_2^j(x)$, $\beta_s^j(x)$, $s = 1, 2, \dots, k$, $\xi^j(x)$, $j = 1, 2, \dots, N$ осуществляют сдвиг краевых условий (3), (4), если для решения нагруженной системы (2) $U^j(x)$ в любой точке x отрезка $[0, l]$ имеет место:

$$\alpha_1^j(x) U^j(x) + \alpha_2^j(x) \frac{dU^j(x)}{dx} + \sum_{s=1}^k \beta_s^j(x) U^j(x_s) + \gamma_1^j(x) U^j(l) + \gamma_2^j(x) \frac{dU^j(l)}{dx} = \xi^j(x), \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

Здесь: $\alpha_1^j(x)$, $\alpha_2^j(x)$, $\gamma_1^j(x)$, $\gamma_2^j(x)$, $\beta_s^j(x)$, $s = 1, 2, \dots, k$, $\xi^j(x)$, $j = 1, 2, \dots, N$ — произвольные вектор функции, удовлетворяющие условиям:

$$\alpha_1^j(0) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^j(0) \\ \alpha_{21}^j(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^j \\ \alpha_{21}^j \end{pmatrix} = \alpha_1^j, \quad \alpha_2^j(0) = \begin{pmatrix} \alpha_{12}^j(0) \\ \alpha_{22}^j(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{12}^j \\ \alpha_{22}^j \end{pmatrix} = \alpha_2^j, \quad (9)$$

$$\gamma_1^j(0) = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^j(0) \\ \gamma_{21}^j(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{11}^j \\ \gamma_{21}^j \end{pmatrix} = \gamma_1^j, \quad \gamma_2^j(0) = \begin{pmatrix} \gamma_{12}^j(0) \\ \gamma_{22}^j(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{12}^j \\ \gamma_{22}^j \end{pmatrix} = \gamma_2^j, \quad (10)$$

$$\beta_s^j(0) = \begin{pmatrix} \beta_s^{1j}(0) \\ \beta_s^{2j}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \dots, k, \quad \xi^j(0) = \begin{pmatrix} \xi_1^j(0) \\ \xi_2^j(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^j \\ \xi_2^j \end{pmatrix} = \xi^j. \quad (11)$$

Несложно проверить, что соотношения (8) при $x = 0$ в силу условий (9) — (7) совпадают с краевыми условиями (3), (4).

Функции $\alpha_1^j(x)$, $\alpha_2^j(x)$, $\gamma_1^j(x)$, $\gamma_2^j(x)$, $\beta_s^j(x)$, $\xi^j(x)$, $s = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, N$, позволяющие осуществить сдвиг краевых условий, определяются не единственным образом. Один из возможных вариантов получения функций, осуществляющих такой перенос, предлагается в нижеприводимой теореме.

Теорема. Пусть функции $\alpha_1^j(x)$, $\alpha_2^j(x)$, $\gamma_1^j(x)$, $\gamma_2^j(x)$, $\beta_s^j(x)$, $\xi^j(x)$, $s = 1, 2, \dots, k$, $j = 1, 2, \dots, N$, определяются из решения следующих задач Коши и соотношений:

$$\frac{d\alpha_1^j(x)}{dx} = S_0^j(x)\alpha_1^j(x) - \frac{1}{\tau}\alpha_2^j(x), \quad \alpha_1^j(0) = \alpha_1^j, \quad (12)$$

$$\frac{d\alpha_2^j(x)}{dx} = S_0^j(x)\alpha_2^j(x) - \alpha_1^j(x), \quad \alpha_2^j(0) = \alpha_2^j, \quad (13)$$

$$\frac{d\beta_s^j(x)}{dx} = S_0^j(x)\beta_s^j(x) - \alpha_2^j(x)B_s^j(x), \quad \beta_s^j(0) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, k, \quad (14)$$

$$\frac{d\xi^j(x)}{dx} = S_0^j(x)\xi^j(x) + \alpha_2^j(x)\left(-\frac{1}{\tau}U^{j-1}(x) - f^j(x)\right), \quad \xi^j(0) = \xi^j, \quad (15)$$

$$\frac{dm^j(x)}{dx} = S_0^j(x)m^j(x), \quad m^j(0) = I, \quad (16)$$

$$\gamma_1^j(x) = m^j(x)\gamma_1^j, \quad \gamma_2^j(x) = m^j(x)\gamma_2^j,$$

где

$$S_0^j(x) = \left[\frac{1}{\tau}\alpha_2^j(x)\alpha_1^{j*}(x) + \alpha_1^j(x)\alpha_2^{j*}(x) + \alpha_1^j(x) \sum_{s=1}^k B_s^j(x)\beta_s^j(x) - \right. \\ \left. - \xi^j(x)\alpha_2^j(x)\left(-\frac{1}{\tau}U^{j-1}(x) - f^j(x)\right) \right] [R^j(x)]^{-1},$$

$$R^j(x) = \alpha_1^j(x)\alpha_1^{j*}(x) + \alpha_2^j(x)\alpha_2^{j*}(x) + \sum_{s=1}^k \beta_s^j(x)\beta_s^{j*}(x) + \xi^j(x)\xi^{j*}(x),$$

$S_0^j(x) \in E^2$, $j = 1, 2, \dots, N$, I — 2-мерный вектор, составленный из единиц. Тогда для функции $U^j(x)$ — решения задачи (2)-(4) в каждой точке $x \in [0, l]$ имеет место (8), причем $R(x) = \text{const} = R(x_0)$, $x \in [0, l]$.

Доказательство. Пусть для $U^j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$, являющихся решением задачи (2)-(4), имеет место соотношение (8), где $\alpha_1^j(x)$, $\alpha_2^j(x)$, $\gamma_1^j(x)$, $\gamma_2^j(x)$, $\beta_s^j(x)$, $\xi^j(x)$,

$s = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, N$, пока произвольные дифференцируемые функции, удовлетворяющие лишь условиям (9) - (7).

Поддифференцируем (8)

$$\begin{aligned} & \frac{d\alpha_1^j(x)}{dx} U^j(x) + \alpha_1^j(x) \frac{dU^j(x)}{dx} + \frac{d\alpha_2^j(x)}{dx} \frac{dU^j(x)}{dx} + \alpha_2^j(x) \frac{d^2 U^j(x)}{dx^2} + \\ & + \sum_{s=1}^k \frac{d\beta_s^j(x)}{dx} U^j(x_s) + \frac{d\gamma_1^j(x)}{dx} U^j(l) + \frac{d\gamma_2^j(x)}{dx} \frac{dU^j(l)}{dx} = \frac{d\xi^j(x)}{dx}. \end{aligned}$$

Учитывая (2), произведем группировку, в результате получим:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d\alpha_1^j(x)}{dx} + \frac{1}{\tau} \alpha_2^j(x) \right] U^j(x) + \sum_{s=1}^k \left[\frac{d\beta_s^j(x)}{dx} + \alpha_2^j(x) B_s^j(x) \right] U^j(x_s) + \\ & + \left[\frac{d\alpha_2^j(x)}{dx} + \alpha_1^j(x) \right] \frac{dU^j(x)}{dx} + \left[\frac{d\xi^j(x)}{dx} - \alpha_2^j(x) \left(-\frac{1}{\tau} U^{j-1}(x) - f^j(x) \right) \right] + \\ & + \frac{d\gamma_1^j(x)}{dx} U^j(l) + \frac{d\gamma_2^j(x)}{dx} \frac{dU^j(l)}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Предполагая, что $U^j(x) \not\equiv 0$, и пользуясь произвольностью функций $\alpha_1^j(x), \alpha_2^j(x), \gamma_1^j(x), \gamma_2^j(x), \beta_s^j(x), \xi^j(x)$, $s = 1, 2, \dots, k$, потребуем равенства нулю выражений в квадратных скобках:

$$\frac{d\alpha_1^j(x)}{dx} = -\frac{1}{\tau} \alpha_2^j(x), \quad \frac{d\alpha_2^j(x)}{dx} = -\alpha_1^j(x), \quad (17)$$

$$\frac{d\beta_s^j(x)}{dx} = -\alpha_2^j(x) B_s^j(x), \quad s = 1, 2, \dots, k, \quad (18)$$

$$\frac{d\xi^j(x)}{dx} = -\alpha_2^j(x) \left(-\frac{1}{\tau} U^{j-1}(x) - f^j(x) \right), \quad (19)$$

$$\frac{d\gamma_1^j(x)}{dx} = 0, \quad \frac{d\gamma_2^j(x)}{dx} = 0. \quad (20)$$

Умножая обе части (8) на произвольную функцию $m^j(x)$ такую, что

$$m^j(0) = I, \quad (21)$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} & m^j(x) \alpha_1^j(x) U^j(x) + m^j(x) \alpha_2^j(x) \frac{dU^j(x)}{dx} + m^j(x) \sum_{s=1}^k \beta_s^j(x) U^j(x_s) + \\ & + m^j(x) \gamma_1^j(x) U^j(l) + m^j(x) \gamma_2^j(x) \frac{dU^j(l)}{dx} = m^j(x) \xi^j(x), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (22)$$

Введем обозначения:

$$g_1^j(x) = m^j(x) \alpha_1^j(x), \quad g_2^j(x) = m^j(x) \alpha_2^j(x), \quad q_s^j(x) = m^j(x) \beta_s^j(x), \quad s = 1, 2, \dots, k, \quad (23)$$

$$r_1^j(x) = m^j(x)\gamma_1^j(x), \quad r_2^j(x) = m^j(x)\gamma_2^j(x), \quad k^j(x) = m^j(x)\xi^j(x), \quad (24)$$

после чего (21) примет вид:

$$\begin{aligned} & g_1^j(x)U^j(x) + g_2^j(x)\frac{dU^j(x)}{dx} + \sum_{s=1}^k q_s^j(x)U^j(x_s) + \\ & + r_1^j(x)U^j(l) + r_2^j(x)\frac{dU^j(l)}{dx} = k^j(x), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (25)$$

Причем из (9) - (7), (15) - (19) следует

$$g_1^j(0) = \alpha_1^j, \quad g_2^j(0) = \alpha_2^j, \quad q_s^j(0) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, k,$$

$$k^j(0) = \xi^j, \quad r_1^j(0) = \gamma_1^j, \quad r_2^j(0) = \gamma_2^j, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Потребуем от $m^j(x)$ выполнения условия

$$\left(\alpha_1^j(x)\alpha_1^{j*}(x) + \alpha_2^j(x)\alpha_2^{j*}(x) + \sum_{s=1}^k \beta_s^j(x)\beta_s^{j*}(x) + \xi(x)\xi^{j*}(x) \right) = const, \quad x \in [0, l]. \quad (26)$$

Продифференцировав (26) и (5), (6) и учтя (15) - (19), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{dg_1^j(x)}{dx}g_1^{j*}(x) + g_1^j(x)\frac{dg_1^{j*}(x)}{dx} + \frac{dg_2^j(x)}{dx}g_2^{j*}(x) + g_2^j(x)\frac{dg_2^{j*}(x)}{dx} + \\ & + \sum_{s=1}^k \left[\frac{dq_s^j(x)}{dx}q_s^{j*}(x) + \frac{dq_s^{j*}(x)}{dx}q_s^j(x) \right] + \frac{dk^j(x)}{dx}k^{j*}(x) + \frac{dk^{j*}(x)}{dx}k^j(x) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg_1^j(x)}{dx} &= \frac{dm^j(x)}{dx}\alpha_1^j(x) + m^j(x)\frac{d\alpha_1^j(x)}{dx} = \frac{dm^j(x)}{dx}(m^j(x))^{-1}g_1^j(x) - m^j(x)\frac{1}{\tau}\alpha_2^j(x) = \\ &= \frac{dm^j(x)}{dx}(m^j(x))^{-1}g_1^j(x) - \frac{1}{\tau}g_2^j(x), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg_2^j(x)}{dx} &= \frac{dm^j(x)}{dx}\alpha_2^j(x) + m^j(x)\frac{d\alpha_2^j(x)}{dx} = \\ &= \frac{dm^j(x)}{dx}(m^j(x))^{-1}g_2^j(x) - m^j(x)\alpha_1^j(x) = \frac{dm^j(x)}{dx}(m^j(x))^{-1}g_2^j(x) - g_1^j(x), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq_s^j(x)}{dx} &= \frac{dm^j(x)}{dx}\beta_s^j(x) + m^j(x)\frac{d\beta_s^j(x)}{dx} = \frac{dm^j(x)}{dx}(m^j(x))^{-1}q_s^j(x) - m^j(x)\alpha_2^j(x)\beta_s^j(x) = \\ &= \frac{dm^j(x)}{dx}(m^j(x))^{-1}q_s^j(x) - g_2^j(x)\beta_s^j(x), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\frac{dk^j(x)}{dx} = \frac{dm^j(x)}{dx}\xi^j(x) + m^j(x)\frac{d\xi^j(x)}{dx} =$$

$$= \frac{dm^j(x)}{dx} (m^j(x))^{-1} k^j(x) + g_2^j(x) \left(-\frac{1}{\tau} U^{j-1} - f^j(x) \right). \quad (31)$$

Подставив (24) - (31) в (23), после несложных преобразований и группировок получим:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{dm^j(x)}{dx} (m^j(x))^{-1} \left(g_1^j(x) g_1^{j*}(x) + g_2^j(x) g_2^{j*}(x) + \sum_{s=1}^k q_s^j(x) q_s^{j*}(x) + k^j(x) k^{j*}(x) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\tau} g_2^j(x) g_1^{j*}(x) + g_1^j(x) g_2^{j*}(x) + \right. \\ & \quad \left. + g_1^j(x) \sum_{s=1}^k B_s^j(x) q_s^j(x) - k^j(x) g_2^j(x) \left(-\frac{1}{\tau} U^{j-1}(x) - f^j(x) \right) \right] + \\ & \left[\frac{dm^j(x)}{dx} (m^j(x))^{-1} \left(g_1^j(x) g_1^{j*}(x) + g_2^j(x) g_2^{j*}(x) + \sum_{s=1}^k q_s^j(x) q_s^{j*}(x) + k^j(x) k^{j*}(x) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\tau} g_2^j(x) g_1^{j*}(x) + g_1^j(x) g_2^{j*}(x) + \right. \\ & \quad \left. + g_1^j(x) \sum_{s=1}^k B_s^j(x) q_s^j(x) - k^j(x) g_2^j(x) \left(-\frac{1}{\tau} U^{j-1}(x) - f^j(x) \right) \right]^* = 0 \end{aligned}$$

Пользуясь произвольностью функции $m^j(x)$, примем значение выражения в квадратных скобках равным нулю, тогда

$$\frac{dm^j(x)}{dx} (m^j(x))^{-1} = S_0^j(x), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} S_0^j(x) &= \left[\frac{1}{\tau} g_2^j(x) g_1^{j*}(x) + g_1^j(x) g_2^{j*}(x) + g_1^j(x) \sum_{s=1}^k B_s^j(x) q_s^j(x) - \right. \\ & \quad \left. - k^j(x) g_2^j(x) \left(-\frac{1}{\tau} U^{j-1}(x) - f^j(x) \right) \right] [R^j(x)]^{-1}, \\ R^j(x) &= g_1^j(x) g_1^{j*}(x) + g_2^j(x) g_2^{j*}(x) + \sum_{s=1}^k q_s^j(x) q_s^{j*}(x) + k^j(x) k^{j*}(x). \end{aligned}$$

Подставляя (33) в (24)-(31) и учитывая (5), (6), переобозначив функции $g_1^j(x)$, $g_2^j(x)$, $r_1^j(x)$, $r_2^j(x)$, $q_s^j(x)$, $k^j(x)$, $s = 1, 2, \dots, k$, соответственно через $\alpha_1^j(x)$, $\alpha_2^j(x)$, $\gamma_1^j(x)$, $\gamma_2^j(x)$, $\beta_s^j(x)$, $\xi^j(x)$, $s = 1, 2, \dots, k$, получим утверждение теоремы.

Из этой теоремы следует, что решение задачи (2) - (4) можно привести к решению задач Коши относительно системы (8) - (12), состоящей из $2(k+4)$ дифференциальных уравнений. В результате их решения, запомнив значения функций $\alpha_1^j(x)$, $\alpha_2^j(x)$, $\gamma_1^j(x)$, $\gamma_2^j(x)$, $\beta_s^j(x)$, $\xi^j(x)$, $s = 1, 2, \dots, k$, в точках нагружения

$x_1, x_2, \dots, x_k$ и x_l получаем линейную систему алгебраических уравнений порядка $2(k+1)$ относительно $U^j(x_1), U^j(x_2), \dots, U^j(x_k), \frac{dU^j(x_1)}{dx}, \frac{dU^j(x_2)}{dx}, \dots, \frac{dU^j(x_k)}{dx}, U^j(l), \frac{dU^j(l)}{dx}$.

Таким образом, предлагаемый подход к решению задачи (1)-(4) заключается в следующем. Применяя метод прямых исходная задача приводится к решению на каждом временном слое $t_j = j\tau$ нагруженного дифференциального уравнения второго порядка (2) с нелокальными условиями (3), (4). Для их решения сначала каким-либо численным методом решаются задачи Коши (8)-(12) и определяются значения функций $\alpha_1^j(x), \alpha_2^j(x), \gamma_1^j(x), \gamma_2^j(x), \beta_s^j(x), \xi^j(x), s = 1, 2, \dots, k$, в точках нагружения $x_1, x_2, \dots, x_k$ и $x = l$. Осуществляя сдвиг условий (3), (4) посредством соотношения (8) в точки нагружения $x_1, x_2, \dots, x_k$ и $x = l$, получим систему алгебраических уравнений порядка $2(k+1)$ относительно $2(k+1)$ неизвестных $U^j(x_1), U^j(x_2), \dots, U^j(x_k), \frac{dU^j(x_1)}{dx}, \frac{dU^j(x_2)}{dx}, \dots, \frac{dU^j(x_k)}{dx}, U^j(l), \frac{dU^j(l)}{dx}$. Для окончательного определения функции $U^j(x)$, необходимо каким-либо численным методом решить задачу Коши (1)-(4) в обратном во времени направлении от $x = l$ до $x = 0$, учитывая найденные значения в точках нагружения $U^j(x_1), \dots, U^j(x_k)$ и $U^j(l)$.

Результаты численных экспериментов

Применим предложенный подход к следующей тестовой задаче.

Задача 1.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + tu(0.25,t) + (t-1)u(0.5,t) + x - 0.75t^2 - 1.81257t - 0.75,$$

$$(x,t) \in \Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq 1\},$$

при начальном и нелокальных граничных условиях:

$$u(x,0) = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = -2u(0,t) + u(1,t),$$

$$\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = (2t+4)u(0,t) - u(1,t), \quad 0 < t \leq 1.$$

Точками нагружения являются: $x_1 = 0.25, x_2 = 0.5$. Несложно проверить, что функция $u(x,t) = x^2 + xt + 1$ является точным решением рассматриваемой задачи.

В табл. 1 приведены полученные приближенные $\tilde{u}(x,t)$ и точные значения $u^*(x,t)$. Жирным шрифтом выделены значения функции в точках нагружения. Численные эксперименты проведены с использованием метода прямых. Временной отрезок $[0;1]$ разделен на 8 частей, $\tau = 1/8$. Решение задач Коши проводилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка при числе разбиений, равном 200 ($h_x = 0.005$), а для решения алгебраической системы применен метод Гаусса с выбором главного члена.

Таблица 1

Полученное ($\tilde{u}(x,t)$) и точно ($u^*(x,t)$) решения задачи 1.

t	x	$\tilde{u}(x,t)$	$u^*(x,t)$	t	x	$\tilde{u}(x,t)$	$u^*(x,t)$
0.125	0.00	1.0003	1.0000	0.625	0.00	0.9992	1.0000
	0.25	1.0935	1.0938		0.25	1.2180	1.2188
	0.50	1.3122	1.3125		0.50	1.5618	1.5625
	1.00	2.1252	2.1250		1.00	2.6244	2.6250
0.25	0.00	0.9998	1.0000	0.75	0.00	0.9990	1.0000
	0.25	1.1248	1.1250		0.25	1.2490	1.2500
	0.50	1.3748	1.3750		0.50	1.6241	1.6250
	1.00	2.2497	2.2500		1.00	2.7491	2.7500
0.375	0.00	0.9997	1.0000	0.875	0.00	0.9987	1.0000
	0.25	1.1559	1.1563		0.25	1.2801	1.2813
	0.50	1.4371	1.4375		0.50	1.6863	1.6875
	1.00	2.3648	2.3750		1.00	2.8837	2.8750
0.50	0.00	0.9994	1.0000	1.00	0.00	0.9985	1.0000
	0.25	1.1869	1.1875		0.25	1.3111	1.3125
	0.50	1.4993	1.5000		0.50	1.7483	1.7500
	1.00	2.4994	2.5000		1.00	2.9974	3.0000

Задача 2. Пусть процесс описывается следующим нагруженным дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + (x+1) \cos t u(0.2,t) + (2x+1) \sin t u(0.6,t) + 2u(0.8,t) +$$

$$+ (x^2 - x - 1) \cos t - 0.02(x+1) \sin 2t - (0.72x + 0.36) \sin^2 t - (2x + 2.28) \sin t - 2,$$

$$(x,t) \in \Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq 1\},$$

при следующих начальном и нелокальных граничных условиях:

$$u(x,0) = 1, 0 \leq x \leq 1,$$

$$2tu(0,t) + u(1,t) + \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + 3 \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 7 \sin t + 2t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$u(0,t) + (t+1)u(1,t) + 2 \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + t \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = (3t+1) \sin t + t + 2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Несложно проверить, что все необходимые условия на исходные данные, функции, участвующие в постановке задачи, выполнены, а точным решением задачи является в отличие от решения задачи 1 более сложная функция $u(x,t) = x^2 \sin t + 1$. Пространственные нагружения сосредоточены в трёх точках $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.6$, $x_3 = 0.8$. В таблице 2 приведены полученные приближенные $\tilde{u}(x,t)$ и точные значения $u^*(x,t)$. Жирным шрифтом выделены значения функции в точках нагружения.

Таблица 2

Полученное ($\tilde{u}(x,t)$) и точное ($u^*(x,t)$) решения задачи 2

t	x	$\tilde{u}(x,t)$	$u^*(x,t)$	t	x	$\tilde{u}(x,t)$	$u^*(x,t)$
0.1	0.1	1.0010	1.0010	0.6	0.1	1.0056	1.0056
	0.2	1.0040	1.0040		0.2	1.0225	1.0226
	0.3	1.0089	1.0090		0.3	1.0507	1.0508
	0.4	1.0159	1.0160		0.4	1.0903	1.0903
	0.5	1.0249	1.0250		0.5	1.1412	1.1412
	0.6	1.0359	1.0359		0.6	1.2036	1.2033
	0.7	1.0488	1.0489		0.7	1.2774	1.2767
	0.8	1.1273	1.0639		0.8	1.3626	1.3614
	0.9	1.0808	1.0809		0.9	1.4595	1.4574
0.2	0.1	1.0020	1.0020	0.7	0.1	1.0064	1.0064
	0.2	1.0079	1.0079		0.2	1.0257	1.0258
	0.3	1.0178	1.0179		0.3	1.0579	1.0580
	0.4	1.0317	1.0318		0.4	1.1031	1.1031
	0.5	1.0496	1.0497		0.5	1.1612	1.1611
	0.6	1.0715	1.0715		0.6	1.2324	1.2319
	0.7	1.0974	1.0973		0.7	1.3165	1.3157
	0.8	1.1273	1.1271		0.8	1.4139	1.4123
	0.9	1.1613	1.1609		0.9	1.5243	1.5218
0.3	0.1	1.0029	1.0030	0.8	0.1	1.0071	1.0072
	0.2	1.0117	1.0118		0.2	1.0286	1.0287
	0.3	1.0265	1.0266		0.3	1.0645	1.0646
	0.4	1.0472	1.0473		0.4	1.1148	1.1148
	0.5	1.0738	1.0739		0.5	1.1796	1.1793
	0.6	1.1064	1.1064		0.6	1.2588	1.2582
	0.7	1.1450	1.1448		0.7	1.3526	1.3515
	0.8	1.1895	1.1891		0.8	1.4609	1.4591
	0.9	1.2402	1.2394		0.9	1.5840	1.5811
0.4	0.1	1.0038	1.0039	0.9	0.1	1.0078	1.0078
	0.2	1.0155	1.0156		0.2	1.0313	1.0313
	0.3	1.0349	1.0350		0.3	1.0705	1.0705
	0.4	1.0622	1.0623		0.4	1.1254	1.1253
	0.5	1.0973	1.0974		0.5	1.1961	1.1958
	0.6	1.1403	1.1402		0.6	1.2827	1.2820
	0.7	1.1911	1.1908		0.7	1.3851	1.3838
	0.8	1.2499	1.2492		0.8	1.5034	1.5013
	0.9	1.3167	1.3154		0.9	1.6378	1.6345
0.5	0.1	1.0047	1.0048	1.0	0.1	1.0084	1.0084
	0.2	1.0191	1.0192		0.2	1.0336	1.0337
	0.3	1.0431	1.0431		0.3	1.0758	1.0757
	0.4	1.0766	1.0767		0.4	1.1348	1.1346
	0.5	1.1199	1.1199		0.5	1.2107	1.2104
	0.6	1.1728	1.1726		0.6	1.3037	1.3029
	0.7	1.2354	1.2349		0.7	1.4137	1.4123
	0.8	1.3078	1.3068		0.8	1.5409	1.5385
	0.9	1.3900	1.3883		0.9	1.6852	1.6816

Заключение

В работе предложен численный метод решения краевой задачи относительно нагруженного параболического уравнения с нелокальными краевыми условиями. Получены формулы и приводится алгоритм для решения задачи. Предложенный подход основан на методе прямых для аппроксимации дифференциального уравнения и операции сдвига условий, развивающем известный метод переноса краевых условий. Подход позволяет свести решение исходной задачи к решению на каждом временном слое (прямой) задач Коши относительно обыкновенных систем дифференциальных уравнений и системы линейных алгебраических уравнений. Приведены результаты численного решения двух тестовых задач, иллюстрирующие эффективность предложенного метода.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

- [1] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995, 305 с. [Nahushev A. M., *Uraveniĵa matematicheskoj biologii*, Vysshaja shkola, Moskva, 1995, 305 pp.]
- [2] Нахушева В. А., *Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов*, Наука, М., 2006, 173 с. [Nahusheva V. A., *Differencial'nye uraveniĵa matematicheskikh modelej nelokal'nyh processov*, Nauka, M., 2006, 173 pp.]
- [3] Нахушев А. М., *Нагруженные уравнения и их применение*, Наука, М., 2012, 232 с. [Nahushev A. M., *Nagruzhennye uraveniĵa i ih primenenie*, Nauka, M., 2012, 232 pp.]
- [4] Нахушев А. М., Борисов В. Н., “Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод”, *Дифференц. уравнения*, **13:1** (1977), 105–110. [Nahushev A. M., Borisov V. N., “Kraevye zadachi dlja nagruzhennykh parabolicheskikh uravnenij i ih prilozhenija k prognozu urovnja gruntovykh vod”, *Differenc. uraveniĵa*, **13:1** (1977), 105–110].
- [5] Худалов М. З., “Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа”, *Владикавказ. матем. журнал*, **4:4** (2002), 59–64. [Hudalov M. Z., “Nelokal'naja kraevaja zadacha dlja nagruzhennogo uraveniĵa parabolicheskogo tipa”, *Vladikavk. matem. zhurn.*, **4:4** (2002), 59–64].
- [6] Дикинов Х. Ж., Кереев А. А., Нахушев А. М., “Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности”, *Дифференц. уравнения*, **12:1** (1976), 177–179. [Dikinov H. Zh., Kereev A. A., Nahushev A. M., “Ob odnoj kraevoj zadache dlja nagruzhennogo uraveniĵa teploprovodnosti”, *Differenc. uraveniĵa*, **12:1** (1976), 177–179].
- [7] Шхануков-Лафисhev М. Х., “Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода”, *Ж. вычисл. матем. и математической физики*, **49:7** (2009), 1223–1231. [Shhanukov-Lafishev M. H., “Lokal'no-odnomernaja shema dlja nagruzhennogo uraveniĵa teploprovodnosti s kraevymi uslovijami III roda”, *Zh. vychisl. matem. i matematicheskoj fiziki*, **49:7** (2009), 1223–1231].
- [8] Егоров А. И., *Основы теории управления*, Физматлит, М., 2004, 504 с. [Egorov A. I., *Osnovy teorii upravlenija*, Fizmatlit, M., 2004, 504 pp.]
- [9] Aida-zade K. R., Abdullaev V. M., “On an Approach to Designing Control of the Distributed-Parameter Processes”, *Autom. Remote Control*, **73:9** (2012), 1443–1455.
- [10] Aida-zade K. R., Abdullaev V. M., “Optimizing placement of the control points at synthesis of the heating process control”, *Autom. Remote Control*, **78:9** (2017), 1585–1599.

- [11] Кожанов А. И., “Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи”, *Ж. вычисл. матем. и математической физики*, **44:4** (2004), 694–716. [Kozhanov A. I., “Nelinejnye nagruzhennye uravnenija i obratnye zadachi”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **44:4** (2004), 694–716].
- [12] Алиханов А. А., Березков А. М., Шхануков-Лафишев М. Х., “Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации”, *Ж. вычисл. матем. и математической физики*, **48:9** (2008), 1619–1628. [Alihanov A. A., Berezkov A. M., Shhanukov-Lafishev M. H., “Kraevye zadachi dlja nekotoryh klassov nagruzhennyh differencial’nyh uravnenij i raznostnye metody ih chislennoj realizacii”, *Zh. vychisl. matem. i matematicheskoj fiziki*, **48:9** (2008), 1619–1628].
- [13] Самарский А. А., Николаев Е. С., *Методы решения сеточных уравнений*, Наука, М., 1978, 532 с. [Samarskij A. A., Nikolaev E. S., *Metody reshenija setochnyh uravnenij*, Nauka, M., 1978, 532 pp.]
- [14] Abdullaev V. M., Aida-zade K. R., “Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **56:1** (2016), 93–105.
- [15] Бондарев Э. А., Воеводин А. Ф., “Разностный метод решения начально-краевых задач для нагруженных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **36:11** (2000), 1560–1562. [Bondarev Je. A., Voevodin A. F., “Raznostnyj metod reshenija nachal’no-kraevyh zadach dlja nagruzhennyh differencial’nyh i integro-differencial’nyh uravnenij”, *Differenc. uravnenija*, **36:11** (2000), 1560–1562].
- [16] Дженалиев М. Т., “Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями”, *Дифференц. уравнения*, **25:4** (1989), 641–651. [Dzhenaliev M. T., “Optimal’noe upravlenie linejnyimi nagruzhennymi parabolicheskimi uravnenijami”, *Differenc. uravnenija*, **25:4** (1989), 641–651].
- [17] Abdullaev V. M., Aida-zade K. R., “Numerical Solution of Optimal Control Problems for Loaded Lumped Systems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **46:9** (2006), 1487–1502.
- [18] Abdullaev V. M., “Numerical solution to parametric identification problems partial differential equations”, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*, **22:2** (2018), 33–44.
- [19] Abdullaev V. M., Aida-zade K. R., “Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary-value problems for ordinary differential equations”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54:7** (2014), 1096–1109.
- [20] Abdullaev V. M., Aida-zade K. R., “On the Numerical Solution of Loaded Systems of Ordinary Differential Equations”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **44:9** (2004), 1585–1595.
- [21] Абрамов А. А., “О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки)”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **1:3** (1961), 542–545. [Abramov A. A., “O perenose granichnyh uslovij dlja sistem linejnyh obyknovennyh differencial’nyh uravnenij (variant metoda progonki)”, *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.*, **1:3** (1961), 542–545].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995. 305 с.
- [2] Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука. 2006. 173 с.
- [3] Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука. 2012. 232 с.
- [4] Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // *Дифференц. уравнения*. 1977. Т.13. №1. С. 105–110.
- [5] Худалов М. З. Нелокальная краевая задача для нагруженного уравнения параболического типа // *Владикавказ. матем. журнал*. 2002. Т.4, №4. С. 59–64.
- [6] Дикинов Х. Ж., Керемов А. А., Нахушев А. М. Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // *Дифференц. уравнения*. 1976. Т. 12, №1. С. 77–79.

- [7] Шхануков-Лафишев М.Х. Локально-одномерная схема для нагруженного уравнения теплопроводности с краевыми условиями III рода // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2009. Т. 49, №7. С. 1223-1231.
- [8] Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит. 2004. 504 с.
- [9] Aida-zade K. R., Abdullaev V. M. On an Approach to Designing Control of the Distributed-Parameter Processes // Autom. Remote Control. 2012. Vol.73, No.9. Pp. 1443–1455.
- [10] Aida-zade K. R., Abdullaev V. M. Optimizing placement of the control points at synthesis of the heating process control // Autom. Remote Control. 2017. vol. 78. No.9. pp. 1585–1599.
- [11] Кожанов А.И. Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2004. Т.44, №4. С.694–716.
- [12] Алиханов А.А., Березков А.М., Шхануков-Лафишев М.Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и математической физики. 2008. Т. 48. № 9. С.1619-1628.
- [13] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [14] Abdullayev V. M., Aida-zade K. R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations // Comput. Math. Math. Phys. 2016. vol.56. No. 1. P. 93–105.
- [15] Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф. Разностный метод решения начально-краевых задач для нагруженных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2000. Т.36. №11. С. 1560-1562.
- [16] Дженалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. №4. С.641-651.
- [17] Abdullaev V. M., Aida-zade K. R. Numerical Solution of Optimal Control Problems for Loaded Lumped Systems // Comput. Math. Math. Phys. 2006. vol. 46, No.9. P.1487–1502.
- [18] Abdullayev V. M. Numerical solution to parametric identification problems partial differential equations // Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2018. vol. 22. No.2. P. 33-44. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-22-2-33-44
- [19] Abdullaev V. M., Aida-zade K. R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary-value problems for ordinary differential equations // Comput. Math. Math. Phys. 2014. vol. 54, No.7. P.1096–1109.
- [20] Abdullaev V. M., Aida-zade K. R. On the Numerical Solution of Loaded Systems of Ordinary Differential Equations // Comput. Math. Math. Phys. 2004. vol. 44, No. 9. P. 1585–1595.
- [21] Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки) // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1961. Т.1. №3. С. 542–545.

Numerical solution of a boundary value problem for a loaded parabolic equation with nonlocal boundary conditions

V. M. Abdullayev^{1,2}

¹ Azerbaijan State Oil and Industry University, Azadlig avenue 20, AZ1010, Baku, Azerbaijan

² Institute of Control Systems, Azerbaijan National Academy of Sciences, 9 B. Vahabzade str. Baku, AZ1141, Azerbaijan

E-mail: vaqif_ab@rambler.ru

In the work, we propose a numerical method of solution to the boundary-value problem with respect to the loaded parabolic equation with nonlocal boundary conditions. We have obtained formulas and derived an algorithm for the solution of the problem. We provide the results of numerical solution to two test problems, which illustrates the efficiency of the approach proposed.

Key words: loaded differential equations, nonlocal conditions, method of lines, transfer of boundary conditions.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-15-28

Original article submitted: 05.08.2020

Revision submitted: 28.09.2020

For citation. Abdullayev V. M. Numerical solution of a boundary value problem for a loaded parabolic equation with nonlocal boundary conditions. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **32**: 3, 15-28. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-15-28

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Abdullayev V. M., 2020

Funding. The study was carried out without funding