УДК 519.2

Научная статья

О разрешимости нелинейного интегро-дифференциального уравнения

А. В. Юлдашева

Филиал МГУ в г. Ташкенте, г. Ташкент, ул. Амира Темура 22, 100060, Республика Узбекистан.

E-mail: yuasv86@mail.ru

В настоящей работе рассматривается задача с начальными данными для нелинейного интегро-дифференциального уравнения, связанного с перидинамической моделью. Доказывается существование и единственность решения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, перидинамика, преобразование Фурье, пространство Соболева.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-127-134

Поступила в редакцию: 18.09.2020

В окончательном варианте: 07.10.2020

Для цитирования. Юлдашева А. В. О разрешимости нелинейного интегро-дифференциального уравнения // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 32. № 3. С. 127-134. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-127-134

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Юлдашева А. В., 2020

1. Введение

Эта работа посвящена изучению разрешимости следующей задачи для нелинейного уравнения перидинамики

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta \left[\int_{\mathbb{R}^n} \beta(x-y) (u(y,t) + g(u,y,t)) dy \right], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

где g нелинейная функция аргументов u, x, t , $\beta(x-y), \phi(x), \psi(x)$ – заданные функции.

Уравнение (1.1) описывает перидинамическую модель движения в среде с нелинейными и нелокальными эластичными свойствами [1], [2], [3]. Корректность задачи (1.1)-(1.2) непосредственно зависит от ядра, участвующего в уравнении. Однако, стоит отметить, что проблема выбора приближенной функции ядра остается открытой.

Финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке Фонда инновационного развития Республики Узбекистан (проект № ОТ-Ф-4-(36+32), № ОТ-Ф-4-(88))

Одномерный случай задачи (1.1)-(1.2) рассмотрен в [4], где наложены сильные условия на преобразование Фурье ядра уравнения.

Далее мы будем использовать преобразование Фурье как в [5] и пространство $H^s = H^s(\mathbb{R}^n)$ будет означать пространство Соболева L_2 в $\mathbb{R}^n$ со следующей нормой

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Напомним, что норма $\|u\|$ в L_2 определяется следующим образом

$$\|u\|^2 = \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi, t)|^2 d\xi.$$

Сформулируем основной результат

Теорема 1.1. *Существует $T > 0$ такое, что задача (1.1)-(1.2) разрешима единственным образом в классе $C^2([0, T], L_2(\mathbb{R}^n))$ при $\phi(x), \psi(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, функции $g(u, x, t)$ удовлетворяет условию Липшица в $\mathbb{R}^n$, $g(0, x, t) = 0$ и преобразование Фурье ядра β удовлетворяет неравенству*

$$\widehat{\beta}(\xi) = \frac{\omega^2(\xi)}{|\xi|^2},$$

где $\omega(\xi) \geq 0$ ограниченная функция.

2. Преобразование уравнения (1.1)

Для начала преобразуем задачу (1.1)-(1.2). Мы сведем ее к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Введем обозначения

$$G(x, t) = g(u(x, t), x, t)$$

и

$$\widehat{G}(\xi, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(u(x, t), x, t) e^{-ix\xi} dx.$$

Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} = -|\xi|^2 \widehat{\beta}(\xi) [\widehat{u}(\xi, t) + \widehat{G}(\xi, t)]. \quad (2.1)$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} + |\xi|^2 \widehat{\beta}(\xi) \widehat{u}(\xi, t) = -|\xi|^2 \widehat{\beta}(\xi) \widehat{G}(\xi, t).$$

В силу условий наложенных на β решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{\phi}(\xi) \cos \omega(\xi)t + \frac{\widehat{\psi}(\xi)}{\omega(\xi)} \sin \omega(\xi)t + \omega(\xi) \int_0^t \widehat{G}(\xi, \tau) \sin \omega(\xi)(t - \tau) d\tau. \quad (2.2)$$

Теперь обозначим

$$B[\widehat{u}](\xi, t) = \widehat{G}(\xi, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g(u(x, t), x, t) e^{-ix\xi} dx, \quad (2.3)$$

здесь

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi, t) e^{ix\xi} d\xi.$$

Учитывая (2.3), мы можем переписать (2.2) в виде

$$\widehat{u}(\xi, t) = \omega(\xi) \int_0^t \sin \omega(\xi)(t - \tau) B[\widehat{u}](\xi, \tau) d\tau + \Phi(\xi, t),$$

где

$$\Phi(\xi, t) = \widehat{\phi}(\xi) \cos \omega(\xi)t + \frac{\widehat{\psi(\xi)}}{\omega(\xi)} \sin \omega(\xi)t.$$

Введем еще одно обозначение

$$A[\widehat{u}](\xi, t) = \omega(\xi) \int_0^t \sin \omega(\xi)(t - \tau) B[\widehat{u}](\xi, \tau) d\tau. \quad (2.4)$$

Итак, мы свели нашу задачу к уравнению

$$\widehat{u} = A[\widehat{u}] + \Phi. \quad (2.5)$$

3. Исследование операторного уравнения

В этой части мы исследуем операторы B и A определенные (2.3) и (2.4) соответственно.

Лемма 3.1. Пусть $g \in Lip(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\|B[\widehat{u}] - B[\widehat{v}]\| \leq L\|\widehat{u} - \widehat{v}\|.$$

Доказательство.

Так как $g(u, x, t)$ Липшецева в $\mathbb{R}^n$

$$|g(u, x, t) - g(v, x, t)| \leq L|u - v|.$$

Согласно теореме Парсеваля, мы получим

$$\|B[\widehat{u}] - B[\widehat{v}]\|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |g(u(x), x, t) - g(v(x), x, t)|^2 \leq$$

$$\leq L^2 \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - v(x)|^2 dx = L^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi) - \hat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

□

Следствие 3.1. Пусть в условиях Леммы 2.1 функция $g(u, x, t)$ удовлетворяет условию $g(0) = 0$. Тогда

$$\|B[\hat{u}]\| \leq L\|\hat{u}\|.$$

Действительно, подставив $\hat{v} = 0$, получим сформулированное утверждение.

Определим для $z : [0, T] \rightarrow B$

$$\|z\|_t = \sup_{0 \leq s \leq t} \|z(s)\|.$$

Лемма 3.2. Пусть $g \in Lip(\mathbb{R}^n)$ и $\omega(\xi)$ ограниченная функция $|\omega(\xi)| \leq C$. Тогда

$$\|A[\hat{u}] - A[\hat{v}]\|_t^2 \leq \frac{L^2 C^4 t^3}{3} \int_0^t \|\hat{u} - \hat{v}\|^2 d\tau. \quad (2.6)$$

Доказательство.

Согласно (2.4) мы можем написать

$$A[\hat{u}](\xi, t) - A[\hat{v}](\xi, t) = \omega(\xi) \int_0^t \sin \omega(\xi)(t - \tau) [B[\hat{u}](\xi, \tau) - B[\hat{v}](\xi, \tau)] d\tau.$$

Далее

$$|A[\hat{u}](\xi, t) - A[\hat{v}](\xi, t)| \leq C^2 \int_0^t (t - \tau) |B[\hat{u}](\xi, \tau) - B[\hat{v}](\xi, \tau)| d\tau.$$

Из этого следует, что

$$|A[\hat{u}](\xi, t) - A[\hat{v}](\xi, t)|^2 \leq C^4(\xi) \frac{t^3}{3} \int_0^t |B[\hat{u}](\xi, \tau) - B[\hat{v}](\xi, \tau)|^2 d\tau.$$

В итоге, имеем

$$\|A[\hat{u}](t) - A[\hat{v}](t)\|^2 \leq \frac{C^4 t^3}{3} \int_0^t \|B[\hat{u}](\tau) - B[\hat{v}](\tau)\|^2 d\tau.$$

Теперь учитывая лемму 3.1, мы получим оценку (2.6).

□

Теперь исследуем уравнение

$$z = Az + \Phi.$$

Лемма 3.3. Следующая оценка имеет место

$$\|A^m[z](\cdot, t) - A^m[w](\cdot, t)\|^2 \leq \frac{C^4 L^{2m} t^{4m-1}}{3^m 4^{m-1} (m-1)!} \int_0^t \|z(\cdot, \tau) - w(\cdot, \tau)\|^2 d\tau.$$

Доказательство. Мы используем метод математической индукции. Согласно лемме 3.2, находим

$$\begin{aligned} \|A^{m+1}[z] - A^{m+1}[w]\|_t^2 &\leq \frac{C^4 L^2 t^3}{3} \int_0^t \|A^m[z](\cdot, \tau) - A^m[w](\cdot, \tau)\|^2 d\tau \leq \\ &\leq \frac{C^4 L^2 t^3}{3} \int_0^t \frac{L^{2m} \tau^{4m-1}}{3^m 4^{m-1} (m-1)!} d\tau \int_0^\tau \|z(\cdot, s) - w(\cdot, s)\|^2 ds \leq \\ &\leq \frac{C^4 L^{2m+2} t^{4m+3}}{3^{m+1} 4^m (m)!} \int_0^t \|z(\cdot, s) - w(\cdot, s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

□

Следствие 3.2. Для любого $T > 0$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что отображение $A^m : C([0, T] \rightarrow L_2(R^n)) \rightarrow C([0, T] \rightarrow L_2(R^n))$ является сжимающим.

Замечание. Оператор $A : C([0, T] \rightarrow L_2(R^n)) \rightarrow C([0, T] \rightarrow L_2(R^n))$ имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Действительно, предположим, что

$$\|A^m z - A^m w\| \leq \alpha \|z - w\|, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пусть

$$A^m z = z.$$

Тогда

$$A^{m+1} z = Az.$$

$$\|Az - z\| = \|A^{m+1} z - A^m z\| = \|A^m(Az) - A^m z\| \leq \alpha \|Az - z\|.$$

Отсюда,

$$(1 - \alpha) \|Az - z\| \leq 0.$$

□

Перейдем к доказательству теоремы 1.1.

Доказательство. Согласно следствию 3.2 уравнение (2.5) имеет единственное решение в L_2 при $t \in [0, T]$.

Так как уравнение (2.5) эквивалентно задаче (1.1)-(1.2), это доказывает утверждение теоремы 1.1. □

4. О гладкости решения

Как и выше, будем предполагать, что ядро β интегрируемая функция, преобразование Фурье которой удовлетворяет неравенству

$$|\widehat{\beta}(\xi)| \leq \frac{B}{(1+|\xi|^2)^{1+\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Теорема 4.1. Пусть $s > 0$ и $0 < \alpha < s$. Тогда существует $T > 0$ такое, что задача (1.1)- (1.2) разрешима в классе $C^2([0, T], H^s(\mathbb{R}^n))$ при $\phi \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $\psi \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Воспользуемся соотношением (2.2):

$$\frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2} = -|\xi|^2 \widehat{\beta}(\xi) [\widehat{u}(\xi, t) + \widehat{G}(\xi, t)].$$

Тогда

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{\phi}(\xi) + t\widehat{\psi}(\xi) - |\xi|^2 \widehat{\beta}(\xi) \int_0^t (t-\tau) [\widehat{u}(\xi, \tau) + \widehat{G}(\xi, \tau)] d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |\widehat{u}(\xi, t)|^2 (1+|\xi|^2)^s &\leq 4(|\widehat{\phi}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s + T^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s + \\ &+ B \frac{T^3}{3} (1+|\xi|^2)^{s-\alpha} \int_0^t (|\widehat{u}(\xi, \tau)|^2 + |\widehat{G}(\xi, \tau)|^2) d\tau). \end{aligned}$$

В силу следствия 3.1 для всех $t \in [0, T]$ имеем

$$\|u(\cdot, t)\|_s^2 \leq 4(\|\phi\|_s^2 + T^2 \|\psi\|_s^2) + 4B \frac{T^3}{3} (1+L) \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_s^2 d\tau,$$

и из леммы Гронуола следует

$$\|u\|_s^2 \leq 4(\|\phi\|_s^2 + T^2 \|\psi\|_s^2) e^{\frac{4BT^4}{3}(1+L)} < \infty.$$

Теорема 4.1 доказана. $\square$

Заключение

Доказана однозначная разрешимость задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения, связанного с моделью перидинамики. Также исследована гладкость решения в зависимости от гладкости ядра уравнения.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литература/References

- [1] Emmrich E., Pusht D., “Measure-valued and weak solutions to the nonlinear peridynamic model in nonlocal elastodynamics”, *Nonlinearity*, **28** (2015), 285-307.
- [2] Silling S.A., Lehoucq R.B., “eridynamic theory of solid mechanics”, *Adv.Appl.Mech.*, **44** (2010), 73-168.
- [3] Yuldasheva A.V., “The linear peridynamic model of elasticity theory”, *Lob.J.Math.*, **41:1** (2020), 137-144.
- [4] Duruk N., Erbay H. A. and Erkip A., “Global existence and blow-up for a class of nonlocal nonlinear Cauchy problems arising in elasticity.”, *Nonlinearity*, **23(1)**:107 (2009), 520-533.
- [5] Nikol'skiy S. M., *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, New York: Springer-Verlag, Grundle. Math. Wissensch, 1975.

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Emmrich E., Pusht D. Measure-valued and weak solutions to the nonlinear peridynamic model in nonlocal elastodynamics // *Nonlinearity*. 2015. vol. 28. pp. 285-307.
- [2] Silling S.A., Lehoucq R.B. Peridynamic theory of solid mechanics// *Adv.Appl.Mech.* 2010. 44. pp. 73-168.
- [3] Yuldasheva A. V. The linear peridynamic model of elasticity theory // *Lob.J.Math.* 2020. 41 (1). pp. 137-144.
- [4] Duruk N., Erbay H. A. and Erkip A. Global existence and blow-up for a class of nonlocal nonlinear Cauchy problems arising in elasticity // *Nonlinearity*. 2009. 23(1). 107. pp. 520-533.
- [5] Nikol'skiy S. M. Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. vol. 205. New York: Springer-Verlag. Grundle. Math. Wissensch. 1975. 418 pp.

MSC 45K05

Research Article

On solvability of nonlinear integro-differential equation

A. V. Yuldasheva

M.V. Lomonosov Moscow State University Tashkent Branch, Tashkent, Uzbekistan.

E-mail: yuasv86@mail.ru

In this paper we consider initial problem for nonlinear integro-differential equation related to peridynamic model. The existence and uniqueness of solution are proved.

Key words: integro-differential equation, peridynamic, Fourier transform, Sobolev space.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-127-134

Original article submitted: 18.09.2020

Revision submitted: 07.10.2020

For citation. Yuldasheva A. V. On solvability of nonlinear integro-differential equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **32**: 3, 127-134. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-127-134

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Acknowledgments. The authors are deeply grateful to the referee for a number of comments that contributed to the improvement of the article.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Yuldasheva A. V., 2020

Funding. This work was supported by Fund of innovative development of Republic of Uzbekistan OTF4-(88) and OT-F4-(36/32).