УДК 371.30+51

Научная статья

Развитие математического мышления на уроках геометрии посредством задач на исследование параметров изображения

М. М. Эсонов¹, Д. Т. Зуннунова²

¹ Кокандский государственный педагогический институт, 150700, ул. Турон 23, г. Коканд, Республика Узбекистан

² Школа №14, 150300, ул. И. Бухорий №15, г. Бешарык, Республика Узбекистан

E-mail: esonov@mail.ru

Статья посвящена развитию математического мышления на основе решения системы разнообразных геометрических задач. Способности создания (восстановления) геометрических образов, рассматриваемых в их динамике синтеза решения из простейших мыслительных операций, что является функциональным свойством математического мышления.

Ключевые слова: развитие мышления, представление воображаемого, атомарные понятия, абстрактное и пространственное мышление, развитие пространственного мышления учащихся, мыслительные операции, атомарный словарь, параметры изображения

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-197-209

Поступила в редакцию: 23.06.2020

В окончательном варианте: 12.08.2020

Для цитирования. Эсонов М. М., Зуннунова Д. Т. Развитие математического мышления на уроках геометрии посредством задач на исследование параметров изображения // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 32. № 3. С. 197-209. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-197-209

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Эсонов М. М., Зуннунова Д. Т., 2020

Введение

Математика в современном мире является частью человеческой культуры. С помощью нее осуществляется познание окружающего мира, развитие мышления, представление воображаемого в виде модели (чертежа). Эти способности непосредственно развиваются при решении геометрических задач.

Одной из ведущих целей математического образования является обучение решению системы разнообразных геометрических задач. В данной статье мы хотим уделить внимание использованию числа параметров (которые являются атомарными) для решения планиметрических и стереометрических задач.

Затем, на примерах покажем связи атомарных понятий при решении геометрических задач.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

Основные понятия

Одной из задач школьного курса геометрии является изучение пространственных форм материального мира, их способов измерений и взаимного расположения в пространстве, а также отношений между ними. Все это имеет огромное значение в развитии пространственного мышления учащихся, расширяет их картину мира. В настоящее время, когда идёт бурное развитие техники, связанного в том числе с измерениями больших массивов данных, плотности информации, поэтому особые требования предъявляются ученым, инженерам, создающих и использующих инновационные технологии в производстве. Важное значение для соответствия указанным требованиям имеет развитие мышления, в котором большое место отводится абстрактному и пространственному мышлениям.

Идея развития мышления не нова, однако математическое мышление, частью которого является абстрактное и пространственное мышления, функционально. Задача "работы" с визуальными образами в начальных курсах геометрии школы – накопление опыта представления образов реальных объектов через их свойства и постановки проблемных ситуаций приводящих к необходимым обобщениям, в первую очередь относится к педагогической задаче курса геометрии.

Ясно, что решения задач любой сложности имеет несколько этапов: изучение текста задачи (перевод, переформулировка текста задачи в личностный тезаурус, лексикон), перевод в образные формы, поиск индивидуума в личном опыте решения подобных задач, проведения анализа условия и формулировка подзадач, решение которых приводит к синтезу общего решения поставленной изначально задачи, иначе в этом процессе "решения геометрической задачи" наблюдается пассивное наблюдение за различными геометрическими образами, включающееся в процесс интериоризации, и активное творческое действие, реализуемое с помощью различных форм экстериоризации. Способность создания (восстановления) геометрических образов, рассматриваемых в их динамике синтеза решения из простейших мыслительных операций является функциональным свойством математического мышления.

Отсюда следует, геометрические задачи связывают различные мыслительные операции, позволяющие наглядно демонстрировать психологические процессы интериоризации и экстериоризации. Поэтому можно сформулировать утверждение, необходимо преподавать в школе как можно раньше действия с геометрическими образами (например фигурами) так, чтобы задачи на разрезание и составление геометрических образов относились сначала к плоскости, а затем в трехмерном пространстве, лежали в основе развития творческого пространственного мышления и конструктивных способностей.

Примеры задач на исследование параметров изображения

Прежде чем перейти к решению задач приведём атомарный словарь и словарь первой ступени используемых терминов.

Упражнение 1. Прежде чем решать задачи заполните пожалуйста, колонки приведенной выше таблицы. Покажем на нескольких примерах, как проводится подсчет числа — параметрического числа изображения (т.е. количества параметров, израсходованных на изображение)

Table 1

Пример №1

Атомарный словарь ¹		
Точка	Прямая	Плоскость
Отношение (определение через элементы теории множеств)		
Принадлежать	Находиться между	Конгруэнтность (равенство)
Словарь первого уровня ²		
Термин	Определение	Примечания
Изображение		
Грань (боковая грань)		
Треугольник		
Пирамида		
Высота пирамиды		
Ребро		
Перпендикулярность		
Основание пирамиды (тела)		
Параметр		
Четырёхугольник		
Диагональ		

Пример 1. Одна из боковых граней треугольной пирамиды перпендикулярна плоскости основания. Эта боковая грань и основание пирамиды правильные треугольники. Приняв произвольный четырехугольник с его диагоналями за изображение пирамиды, найдем параметрическое число изображения.

Решение: При решении задачи обратим внимание к вышеследующей таблице № 1. Схема № 1, где изображено связь понятий в наглядном виде (параметров изображений) (рис.1).

Опорная схема связи основных атомарных понятий к примеру №1

Рис. 1

Изображение правильного треугольника, лежащего в основании пирамиды, произвольным треугольником влечет за собой расход двух параметров. Изображение боковой грани, являющейся в оригинале правильным треугольником, с помощью произвольного треугольника (одна сторона этого треугольника, естественно, является также стороной треугольника, лежащего в основании пирамиды) влечет за собой расход еще двух параметров. И наконец, считая, что построенные треугольники являются изображениями треугольников, плоскости которых в оригинале перпендикулярны, мы накладываем на изображение еще одно метрическое условие, т.е. расходуем еще один параметр.

Итак, на изображение данной пирамиды израсходовано пять параметров, т.е. параметрическое число p изображения равно 5, и, значит, последующие метрические построения на этом изображении выполнять произвольно уже нельзя.

Пусть в этом примере сторона основания данной пирамиды равна a и требуется найти площадь боковой поверхности пирамиды. Опуская для краткости далее слова «изображение пирамиды», «изображение треугольника» и т. д., скажем короче, что дана пирамида $SABC$, у которой боковая грань SAB и основание ABC — правильные треугольники, причем плоскость SAB перпендикулярна плоскости ABC . Ясно, что

$$S_{SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Чтобы найти S_{SAB} , нужно найти высоту SK треугольника SAC . Для решения задачи требуется выполнить дополнительные построения, причем, так как изображение является метрически определенным (на него израсходованы все пять параметров), высота SK не может быть построена произвольно, т. е. нельзя, взяв на AC произвольно точку K , утверждать: «Пусть $SK \perp AC$ ». Требуемое дополнительное построение можно выполнить следующим образом. Проведем медиану BM треугольника ABC . Так как треугольник ABC правильный, то медиана BM является высотой, т. е. $BM \perp AC$. Аналогично, проведя медиану SD треугольника SAB , имеем $SD \perp AB$. Нетрудно доказать, что отрезок SD перпендикулярен плоскости ABC . Проведем прямую $DK \parallel BM$, тогда прямая DK перпендикулярна AC . Соединим точку S с точкой K . Так как $SD \perp ABC$, то — проекция DK на плоскость ABC , и, следовательно, $SK \perp AC$. Теперь осталось выполнить несложные подсчеты. Находим, что

$$SD = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}, DK = \frac{BM}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}, SK = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

Таким образом,

$$S_{bok} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{5})$$

Table 2

Пример №2

Атомарный словарь		
Точка	Прямая	Плоскость
Отношение (определение через элементы теории множеств)		
Принадлежать	Находиться между	Конгруэнтность (равенство)
Словарь первого уровня		
Термин	Определение	Примечания
Вершина		
Равносторонний		
Тангенс		
Угол		
Медиана		

Упражнение 2. Прежде чем решать задачи заполните колонки приведенной таблицы.

Пример 2. Из вершины B равностороннего треугольника ABC к плоскости ABC восстановлен перпендикуляр BK , причем $BK = AB$. Найдем тангенс острого угла между прямыми AK и BC .

Решение: При решении задачи обратим внимание к вышеследующей таблице №2. Схема №2, где изображено связь понятий в наглядном виде (параметров изображений). Построим изображение данной фигуры и найдем параметрическое число изображения.

Опорная схема связи основных атомарных понятий к примеру №2

Рис. 2

Считая произвольный треугольник ABC изображением равностороннего треугольника, мы расходуем два параметра. Считая отрезок BK изображением перпендикуляра к плоскости ABC , расходуем также два параметра, и, наконец, считая, что $BK : AB = 1 : 1$, расходуем еще один параметр. Таким образом, $p = 5$. Другими словами, построенное изображение метрически определено, а это значит, что дальнейшие метрические построения на нем больше нельзя выполнять произвольно. Между тем новые построения необходимы, по крайней мере для того, чтобы ввести в чертеж угол между прямыми AK и BC .

Итак, перейдем к дополнительным построениям. В плоскости ABC через точку A проведем прямую $l \parallel BC$. Тогда угол между прямыми AK и l равен углу между

прямыми AK и l . Чтобы найти угол между прямыми AK и l , очевидно, целесообразно включить этот угол в какой-нибудь треугольник. Если из точки K опустить перпендикуляр KD на прямую l , то указанный угол будет включен в прямоугольный треугольник ADK . Построение перпендикуляра KD является метрическим построением. В рассматриваемом примере на изображение израсходовано уже пять параметров, поэтому теперь нельзя, взяв на прямой l произвольно точку D , сказать: «Будем считать прямую KD изображением перпендикуляра к прямой l ». Ясно, что прямую KD можно построить как наклонную, проекция которой перпендикулярна прямой l . Для проведения этой проекции — прямой BD можно использовать тот факт, что треугольник ABC равносторонний и, следовательно, его медиана AM является и перпендикуляром к стороне BC . Таким образом, построив медиану AM треугольника ABC , а затем построив прямую $BM \parallel AM$ и отрезок KD , мы получим прямоугольный треугольник ADK . Отношение $KD : AD = \operatorname{tg} DAK$ и будет искомым. Положив для выполнения подсчетов $AB = a$, найдем, что $BK = a$, $BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $DK = \frac{a\sqrt{7}}{2}$, $AD = BM = \frac{a}{2}$, и таким образом, $\operatorname{tg} DAK = \sqrt{7}$, а следовательно, и тангенс угла между прямыми AK и BC равен $\sqrt{7}$.

Table 3

Пример №3

Атомарный словарь		
Точка	Прямая	Плоскость
Отношение (определение через элементы теории множеств)		
Принадлежать	Находиться между	Конгруэнтность (равенство)
Словарь первого уровня		
Термин	Определение	Примечания
Треугольник		
Равнобедренный		
Острый угол		
Катет		
Гипотенуза		

Упражнение 3. Прежде чем решать задачи заполните колонки приведенной выше таблицы.

Пример 3. Один катет равнобедренного прямоугольного треугольника лежит в плоскости α , а другой образует с ней угол, равный 45° . Построим изображение данной фигуры, найдем параметрическое число его, а затем величину угла, который образует гипотенуза треугольника с плоскостью α .

Решение: При решении задачи обратим внимание к вышеследующей таблице №3. Схема №3, где изображено связь понятий в наглядном виде (параметров изображений) (рис.3).

Опорная схема связи основных атомарных понятий к примеру №3

Рис. 3

Считая произвольный треугольник ABC изображением прямоугольного треугольника, расходуем на изображение один параметр. Считая, что $AC : BC = 1 : 1$, расходуем еще один параметр. Считая далее, что отрезок BC является изображением отрезка, образующего с плоскостью α угол, равный в оригинале 45° , расходуем на

изображение также один параметр. Таким образом, $p = 3$, а это значит, что для последующих метрических построений имеется еще некоторая свобода (не израсходованы два параметра). Найдем теперь величину угла, который образует гипотенуза AB с плоскостью α . Возьмем в плоскости α некоторую точку B и будем считать, что отрезок BB^* является изображением отрезка, перпендикулярного плоскости α . Таким образом, оставшиеся в запасе два свободных параметра мы израсходовали и построенное изображение стало метрически определенным. Новых метрических построений на этом изображении больше нельзя выполнять произвольно. Впрочем, в данном случае этого и не потребуются.

Соединим точку B с точками A и C . Положив далее $AC = a$, найдем, что, $BC = a$, $BB^* = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $AB = a$. Таким образом, в прямоугольном треугольнике ABB^* имеем $BB^* : AB = 1 : 2$, т.е. $\angle BAB^* = 30^\circ$. Но $BB^* \perp \alpha$, т.е. $\angle BAB^*$ — это угол, образованный гипотенузой AB с плоскостью α . Итак, искомый угол равен 30° .

Замечание. Выбирая точку B , принадлежащую плоскости α , произвольно, мы, руководствуясь соображениями наглядности получаемого изображения, подобрали ее таким образом, чтобы прямая BB^* была параллельна краю страницы. Такое изображение вызывает представление о том, что в оригинале $B_0B_0^* \perp \alpha_0$.

Table 4

Пример №4

Атомарный словарь		
точка	прямая	плоскость
Отношение (определение через элементы теории множеств)		
Принадлежать	Находиться между	Конгруэнтность (равенство)
Словарь первого уровня		
Термин	Определение	Примечания
Четырёхугольник		
Правильный четырёхугольник		
Пирамида		
Правильная (четырёхугольная) пирамида		
Смежные(грани)		
Боковое ребро		
Основание пирамиды		
Высота пирамиды		
Двухгранный угол		
Проекция(бокового ребра)		

Упражнение 4. Прежде чем решать задачи заполните колонки приведенной выше таблицы.

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде угол между двумя смежными боковыми гранями равен 2β . Найдем угол, образованный боковым ребром пирамиды с плоскостью ее основания.

Опорная схема связи основных атомарных понятий к примеру №4

Рис. 4

Решение: При решении задачи обратим внимание к вышеследующей таблице №4. Схема №4, где изображено связь понятий в наглядном виде (параметров изображений)(рис.4). Ясно, что фигура $SABCD$ является полным изображением заданной пирамиды. Изображение квадрата, лежащего в основании данной пирамиды, произвольным параллелограммом $ABCD$ влечет за собой расход двух параметров. Изображение высоты пирамиды отрезком SO (точка O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$) влечет за собой расход еще двух параметров, так как мы считаем, что отрезок SO — это изображение перпендикуляра к плоскости ABC .

Итак, $p = 4$, т.е. для выполнения дальнейших метрических построений, которые могут потребоваться в процессе решения задачи, в нашем распоряжении имеется еще один параметр.

Для решения поставленной задачи построим на изображении линейный угол данного двугранного угла. Это можно сделать, например, следующим образом: возьмем на ребре SC произвольно точку M и будем считать отрезок OM изображением пер-

пендикуляра к ребру SC . Соединяя теперь точку M с точками B и M , получим угол BMD , являющийся, как нетрудно показать, линейным углом данного двугранного угла. Таким образом, в чертеж теперь можно ввести обозначение $\angle BMD = 2\beta$. Так как отрезок SO — высота пирамиды, то отрезок OD — это проекция бокового ребра SD на плоскость основания пирамиды, а поэтому угол SDO искомый. Нетрудно подсчитать, что величина его равняется $\arcsin(\cot \beta)$, где $45^\circ < \beta < 90^\circ$.

Заканчивая на этом изложение общих сведений о построении изображений пространственных фигур в школьном курсе геометрии, отметим, что учитель должен свободно владеть понятием верного изображения, знать, разрешима ли позиционная задача, которую он хочет предложить учащимся, и сколь произвольно может быть выполнено требуемое метрическое построение. Естественно, ни о полноте изображения, ни о метрической определенности его, ни о подсчете параметрического числа изображения учитель на уроке математики рассказывать не должен, так как этот материал программой не предусмотрен. Однако вполне возможно рассмотрение этих вопросов (с разумной степенью строгости) во внеклассной работе или на факультативных занятиях.

Наглядность обогащает запас пространственных представлений ученика и студента. Уточняет их и помогает установить связь между теоретическими и абстрактными утверждениями и реальными геометрическими фактами. Заставляет логически мыслить и находить недостатки в воображаемом. Большое внимание при изучении школьного курса геометрии нужно уделять наглядности обучения. В этот момент у учащегося и студента работает логическое мышление, представление абстрактного понимания, слуховая память, речевая память, зрительная память и сопоставление воображаемого с реальным.

Упражнение. Постройте классификацию понятий по уровням абстракций для каждой приведенной выше таблицы.

Заключение

В заключении хотелось бы отметить, что такие геометрические задачи развивают логику мышления, вырабатываются такие навыки как визуализация, представление воображаемого на наглядное, и стимулируют его. В результате решения таких комплексов геометрических задач у учащихся развиваются:

- навыки формулирования геометрических задач по чертежу;
- нахождение путей решения по чертежу — это им дается намного легче достичь результата;
- навыки умения самим себе задавать вопросы по задаче, отвечая на которые продвигаются в решении задачи.

Решение планиметрических и стереометрических задач посредством чертежа с использованием атомарных понятий сейчас является очень актуальным направлением в обучении математике. Учащиеся при решении таких задач избавляются от косноязычия, от совершения логических ошибок в решении геометрических задач и выводах. Кроме того, решение таких комплексов задач позволяет провести более качественную подготовку к ЕГЭ, ОГЭ по математике, а именно, в задачах повышенного и высокого уровней сложности по разделу “Планиметрия” и “Стереометрия”.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литература/References

- [1] Штейнгауз Г., *Задачи и размышления*, Мир, М., 1974, 399 с. [Shteyngauz G., *Zadachi i razmyshleniya*, Mir, M., 1974, 399 pp.]
- [2] Кирилов А. Ф., *Черчение и рисование*, Высшая школа, М., 1980, 370 с. [Kirilov A. F., *Chercheniye i risovaniye*, Vysshaya shkola, M., 1980, 370 pp.]
- [3] Гушин И. А., Феофанова А. Е., *Проекционное черчение*, Метод. указ., МГТУ «Станкин», 1998, 28 с. [Gushin I. A., Feofanova A. Ye, *Proyeksionnoye chercheniye*, Metod. ukaz., MGTU «Stankin», 1998, 28 pp.]
- [4] Гушин И. А., *Введение в начертательную геометрию*, Метод. указ., МГТУ «Станкин», 2001, 45 с. [Gushin I. A., *Vvedeniye v nachertatel'nyuyu geometriyu*, Metod. ukaz., MGTU «Stankin», 2001, 45 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Штейнгауз Г. Задачи и размышления. М.: Мир, 1974. 399 с.
- [2] Кирилов А. Ф. Черчение и рисование. М.: Высшая школа, 1980. 370 с.
- [3] Гушин И. А., Феофанова А. Е. Проекционное черчение. Метод. указ. МГТУ «Станкин». 1998. 28 с.
- [4] Гушин И. А. Введение в начертательную геометрию. Метод. указ. МГТУ «Станкин», 2001. 45 с.

MSC 97D40

Research Article

The development of mathematical thinking in geometry lessons through tasks to study image parameters

M. M. Esonov¹, D. T. Zunnunova²

¹ Kokand State Pedagogical Institute, 150700, Turon str., 23, Kokand, Republic of Uzbekistan

² School № 14, 150300, I. Buchoriy str., №15, Besharik, Republic of Uzbekistan

E-mail: esonov@mail.ru

The article is devoted to the development of mathematical thinking based on the solution of a system of various geometric problems. Ability to create (restore) geometric images considered in their dynamics of synthesis of a solution from the simplest mental operations, which is a functional property of mathematical thinking.

Key words: the development of thinking, the imagination, atomic concepts, abstract and spatial thinking, the development of spatial thinking of students, mental operations, atomic dictionary, image parameters.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-197-209

Original article submitted: 23.06.2020

Revision submitted: 12.08.2020

For citation. Esonov M. M., Zunnunova D. T. The development of mathematical thinking in geometry lessons through tasks to study image parameters. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **32**: 3, 197-209. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-197-209

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Esonov M. M., Zunnunova D. T., 2020

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors