МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.9

Научная статья

О некоторых моделях взаимодействия социальных групп

Р. О. Кенетова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: raisa.kenetova@mail.ru

При создании математических моделей социальных процессов возникают такие трудности как отсутствие фундаментальных законов, плохая "измеримость" социальных показателей, сильная разномасштабность – от малых социальных групп до этносов, разнородность и нелинейность изучаемых социальных объектов. Процесс взаимодействия индивидуумов, коллективов и организованных масс есть сложная синергетическая система зависимых переменных и поведение этой системы может резко изменяться при некоторых внешних условиях, приводя к различного рода экстремальным (кризисным) ситуациям, к изменениям в макроскопических масштабах.

Ключевые слова: динамическая модель, социальные процессы, межэтнические отношения, коммуникационное поле, система информации, нелинейная система уравнений.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-135-142

Поступила в редакцию: 30.07.2020

В окончательном варианте: 15.09.2020

Для цитирования. Кенетова Р. О. О некоторых моделях взаимодействия социальных групп // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 32. № 3. С. 135-142. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-135-142

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Кенетова Р. О., 2020

Введение

В настоящее время математические методы заняли достойное место в социальных исследованиях. При изучении социальных процессов проблема предсказания будущего того или иного общества является самой актуальной. При математическом способе обработки данных получают более тонкие результаты. Именно этот подход отсутствовал у ученых в прошлом.

Современная разработка гуманитариями и математиками моделей поведения социальных общностей в различных ситуациях, формулировка и обоснование соответствующих поведенческих гипотез и постулатов способствует их плодотворному взаимовлиянию и взаимообогащению.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

При создании математических моделей социальных процессов возникают такие трудности как отсутствие фундаментальных законов, плохая "измеримость" социальных показателей, сильная разномасштабность – от малых социальных групп до этносов, разнородность и нелинейность изучаемых социальных объектов [1]. Процесс взаимодействия индивидуумов, коллективов и организованных масс есть сложная синергетическая система зависимых переменных и поведение этой системы может резко изменяться при некоторых внешних условиях, приводя к различного рода экстремальным (кризисным) ситуациям, к изменениям в макроскопических масштабах.

Теперь хорошо известно, что все биосистемы, в том числе и человек, с физической точки зрения действуют в колебательном режиме, что этот режим всегда нелинейно связан с электромагнитным (в особенности гелио-магнитным) полем среды обитания биосистемы и конкретно ее составляющего (элемента).

Динамика общественного развития, в том числе и внутриэтнической эволюции, безусловно, является нелинейной функцией от множества взаимодействующих факторов, например: природных, территориальных, экологических, социально-психологических, которые в свою очередь существенно зависят от временного фактора.

Чем сложнее социально-историческое явление, тем труднее построить в достаточной степени адекватную ему, но в то же время простую математическую модель. Слишком сложные модели, как правило, чрезмерно громоздки, плохо поддаются качественному анализу, компьютерно не реализуемы и, стало быть, не имеют практической ценности [2].

Динамическая модель конкуренции между противоборствующими партиями

Рассмотрим математическую модель соперничества противоборствующих партий. Пусть каждая из сторон имеет представление о "количестве" голосов для себя и о "количестве" голосов для другой стороны. Чтобы построить математическую модель можно сформулировать поведенческую гипотезу, которая будет состоять из предположений. Во-первых, каждая из сторон хочет реализовать свои представления о желаемом "количестве" голосов как для себя, так и для конкурента. Во-вторых, интенсивность действий каждого из сторон определяется пропорционально следующим факторам: разность между желаемым и текущим "количеством" голосов, самим этим текущим "количеством" голосов, компетентности соответствующего партнера.

Обозначим через $N_i(t)$ текущее "количество" голосов i – го партнера, а через $N_{ij}(t)$ – "количество" голосов, которое i партнер хотел бы видеть для j – ой стороны. На основании предположений можно выписать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = a_{11}N_1(N_{11} - N_1) + a_{21}N_2(N_{21} - N_1), \\ \frac{dN_2}{dt} = a_{12}N_1(N_{12} - N_2) + a_{22}N_2(N_{22} - N_2), \end{cases} \quad (1)$$

где $a_{ij} = a_{ij}(t, N_1, N_2, N_{11}, N_{12}, N_{21}, N_{22})$ – значения компетентного властолюбия партнеров, являющиеся заданными функциями своих аргументов.

Система уравнений (1) дополняется начальными условиями

$$N_1(0) = N_1^0 > 0, \quad N_2(0) = N_2^0 > 0.$$

Даже в случае $a_{ij} = \text{const}$, (1) – нелинейная система двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ системы показывает, что функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ с течением времени стремятся к равновесным значениям

$$\min(N_{11}, N_{21}) \leq N_1 \leq \max(N_{11}, N_{21}),$$

$$\min(N_{12}, N_{22}) \leq N_2 \leq \max(N_{12}, N_{22}).$$

Исследование математической модели может позволить обосновать принцип "не желать для себя слишком много голосов и слишком мало голосов для партнера". Нарушение этого принципа может отрицательно сказаться на устойчивости равновесия системы [3].

Модель формирования коммуникационного поля внутри системы

Рассмотрим систему межэтнических отношений двух этносов X и Y , которые связаны между собой одним информационным пространством и одной средой обитания Ω , информационно изолированной от внешней среды. Примем следующие допущения:

1. В среде обитания Ω существует надежная система информационной связи, функционирующая в реальном масштабе времени t , и межэтнические отношения во временном интервале $0 < t < T$ определяются в основном их активным взаимодействием на информационном уровне.

2. В этносе Y в момент времени $t \in [0, T]$ имеется $y = y(t)$ людей, обладающих определенной системой информации S_{in} , весьма важной в гармонизации межэтнических отношений, а в этносе X – нет таковых. Этнос X в этот момент имеет $x = x(t)$ индивидуумов, способных воспринимать систему информации S_{in} , то есть восприимчивых к S_{in} , а этнос Y $v(t)$ – индивидуумов.

3. Представители этноса Y численностью $y(t)$ в любой момент времени t от начального $t = 0$ до расчетного $t = T$ ведут активную информационную борьбу с $v(t)$ людьми своего этноса и с $x(t)$ из этноса X на предмет увеличения численности индивидуумов в среде обитания Ω , владеющих системой информации S_{in} .

4. Общая численность людей среды обитания остается неизменной во временном сегменте $0 \leq t \leq T$, и эта численность

$$m = x_0 + y_0 + v_0, \quad (2)$$

где

$$x(0) = x_0, \quad (3)$$

$$y(0) = y_0, \quad (4)$$

$$v(0) = v_0, \quad (5)$$

5.

$$z(t) = m - x(t) - y(t) - v(t)$$

– численность индивидуумов в среде Ω , которые в момент $t \in [0, T]$, изолированы от системы S_{in} ; причем изоляция индивидуума от S_{in} может произойти в том и только в

том случае, когда он удален из среды обитания Ω или полностью воспринял систему информации S_{in} и принял обязательство не вести информационную борьбу с целью увеличения численности людей, владеющих этой системой.

По аналогии с детерминистической моделью теории эпидемии [4] можно предположить следующую математическую модель информационного взаимодействия людей в среде обитания Ω :

$$\frac{dx}{dt} = -\beta xy, \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta xy + \delta vy - \gamma y, \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\delta vy, \quad (8)$$

$$\frac{dz}{dt} = \gamma y. \quad (9)$$

Здесь, в этой модели, β , δ – постоянные величины – коэффициенты информационного взаимодействия, и предполагается, что в интервале времени $dt \equiv \Delta t$ численность людей, обладающих S_{in} ; покидает вследствие их изоляции $\gamma y(t)dt$ индивидуумов, где γ – постоянный коэффициент покидания или изоляции.

Из системы четырех дифференциальных уравнений (6) – (9) после их почленного сложения получаем:

$$\frac{d}{dt} [x(t) + y(t) + v(t) + z(t)] = 0. \quad (10)$$

Гипотеза (2) говорит о том, что

$$z(0) = 0. \quad (11)$$

Уравнение (10) вместе с условиями Коши (3) – (5) и (11) показывают, что

$$x(t) + y(t) + v(t) + z(t) = m, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (12)$$

Равенство (11) согласуется с нашим предположением о неизменности общей численности людей в среде Ω во временном сегменте $[0, T]$.

При $\beta \neq 0$ из уравнений (6) и (9) имеем:

$$\frac{dx}{dz} = -\rho x, \quad \rho = \frac{\gamma}{\beta}. \quad (13)$$

Число ρ , как и в теории эпидемии, характеризует относительную частоту удаления (изоляции).

В силу (3) и (11) дифференциальное уравнение (13) эквивалентно уравнению

$$x(t) = x_0 \exp \left[-\frac{z(t)}{\rho} \right]. \quad (14)$$

Аналогично из (8) и (9) в соответствии с (5) получим:

$$\frac{dv}{dz} = -\rho v \Rightarrow v(t) = v_0 \exp \left[-\frac{z(t)}{\rho_0} \right], \quad \rho_0 = \frac{\gamma}{\delta}. \quad (15)$$

Подставляя в уравнение (9) значение $y(t)$ из (12) и взяв $x(t)$ и $v(t)$ из формулы (14), (15) получим, что $z = z(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dz}{dt} = \gamma \left[m - z - x_0 \exp\left(-\frac{z}{\rho}\right) - v_0 \exp\left(-\frac{z}{\rho_0}\right) \right] \quad (16)$$

и начальному условию (11).

Из уравнения (7) непосредственно вытекает интуитивно ясное заключение о том, что система информации S_{in} в среде обитания Ω не будет распространяться, если $y_0(\beta x_0 - \gamma + \delta v_0)$ не будет положительным числом.

Пусть

$$y_0 > 0, \quad \rho < x_0 + \delta v_0 / \beta. \quad (17)$$

Как видно из (11), (16) и (17), при

$$z'(0) = \gamma y_0 > 0. \quad (18)$$

Правая часть уравнения (16), то есть функция

$$\varphi(z) = \gamma \left[m - z - x_0 \exp\left(-\frac{z}{\rho}\right) - v_0 \exp\left(-\frac{z}{\rho_0}\right) \right],$$

является аналитической функцией переменной $z \geq 0$; $\varphi(0) = m - x_0 - v_0 = \gamma y_0 > 0$, $\varphi(z)$ при $z \rightarrow +\infty$, стремится к $-\infty$. Так как

$$\varphi'(z) = \gamma \left[\frac{x_0}{\rho} \exp\left(-\frac{z}{\rho}\right) + \frac{v_0}{\rho_0} \exp\left(-\frac{z}{\rho_0}\right) - 1 \right],$$

то

$$\varphi'(0) = \beta x_0 + \delta v_0 - \gamma. \quad (19)$$

Из (17) и (19) следует, что $\varphi'(0) > 0$. Неравенство (18) и эти свойства говорят о том, что функция $z'(t)$ описывается колоколообразной симметричной кривой.

Модель (16) можно упростить, если в разложении

$$\exp\left(-\frac{z}{\rho}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/\rho)^k}{(-1)^k k!},$$

ограничиться до члена, содержащего z^2 , то есть если положить, что

$$\exp\left(-\frac{z}{\rho}\right) \approx 1 - \frac{z}{\rho} + \frac{z^2}{2\rho^2}.$$

Другими словами, модель (16) можно аппроксимировать уравнением:

$$z'(t) = \gamma \left[m - z - x_0 \left(1 - \frac{z}{\rho} + \frac{z^2}{2\rho^2} \right) - v_0 \left(1 - \frac{z}{\rho_0} + \frac{z^2}{2\rho_0^2} \right) \right], \quad (20)$$

то есть следующим дифференциальным уравнением первого порядка:

$$z'(t) = az^2(t) - 2bz(t) + c, \quad 0 \leq t \leq T \quad (21)$$

с начальным условием (11), где

$$a = -\frac{\gamma}{2} \left(\frac{x_0}{\rho^2} + \frac{v_0}{\rho_0^2} \right), \quad b = -\frac{\gamma}{2} \left(\frac{x_0}{\rho} + \frac{v_0}{\rho_0} - 1 \right), \quad c = \gamma u_0.$$

Уравнение (21) в теории дифференциальных уравнений известно как уравнение Риккати [5].

Уравнение (21) имеет стационарное решение z_s тогда и только тогда, когда

$$az_s^2 - 2bz_s + c = 0. \quad (22)$$

Поскольку $ac < 0$, то величина

$$z_s = b + \sqrt{b^2 - ac} \quad (23)$$

представляет собой единственное неотрицательное решение квадратного уравнения (21).

Уравнение (21) можно переписать в виде [5]

$$\frac{d}{dt}(z_s - z)^{-1} - (4bz_s - a)(z_s - z)^{-1} + 2b = 0,$$

или

$$\frac{d}{dt} \frac{\exp[-(4bz_s - a)t]}{z_s - z} = -2b \exp[-(4bz_s - a)t]. \quad (24)$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^t \exp[(a - 4bz_s)\tau] d\tau = \frac{\exp[(a - 4bz_s)t] - 1}{a - 4bz_s},$$

из (24) и начального условия (11) получаем:

$$\frac{\exp[(a - 4bz_s)t]}{z_s - z} = \frac{1}{z_s} + \frac{2b\{1 - \exp[(a - 4bz_s)t]\}}{a - 4bz_s}.$$

Стало быть,

$$z(t) = z_s + \frac{(a - 4bz_s)z_s}{2bz_s - (a - 4bz_s)\exp[(4bz_s - a)t]}. \quad (25)$$

Формула (25) является весьма простой, но вместе с тем интересной моделью для прогнозирования динамики численности индивидуумов в среде обитания Ω , которые изолированы от системы S_{in} .

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литература/References

- [1] Гуц А.К., *Глобальная этносоциология*, Учебное пособие, Ом.ГУ, Омск, 1997. [Guts A. K., *Global'naya etnosotsiologiya*, Uchebnoe posobie, OmSU, Omsk, 1997].
- [2] Нахушев А. М., Кенетова Р. О., *Моделирование социально-исторических и этнических процессов*, Эль-Фа, Нальчик, 1998, 171 с. [Nakhushev A. M., Kenetova R. O., *Modelirovanie sotsial'no-istoricheskikh i etnicheskikh protsessov*, El'-Fa, Nalchik, 1998, 171 pp.]
- [3] Михайлов А. П., *Моделирование системы власть-общество*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2006, 144 с. [Modelirovanie sistemy "vlast'-obshchestvo, FIZMATLIT, M., 2006, 144 pp.]
- [4] Бейли Н., *Математика в биологии и медицине*, Мир, М., 1970, 326 с. [Beyli N., *Matematika v biologii i meditsine*, Mir, M., 1970, 326 pp.]
- [5] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995, 301 с. [Nakhushev A. M., *Uravneniya matematicheskoi biologii*, Vysshaya shkola, M., 1995, 301 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Гуц А. К. Глобальная этносоциология. Учебное пособие. Омск: Ом.ГУ, 1997.
- [2] Нахушев А. М., Кенетова Р. О. Моделирование социально-исторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-Фа, 1998. 171 с.
- [3] Михайлов А. П. Моделирование системы власть-общество. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 144 с.
- [4] Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с.
- [5] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

MATHEMATICAL MODELING

MSC 93A30

Research Article

About some models of interaction of social groups

R. O. Kenetova

Institute of Applied Mathematics and Automation, str. Shortanova 89A, 360000, Nalchik, Kabardino-Balkar Republic, Russia.

E-mail: raisa.kenetova@mail.ru

When creating mathematical models of social processes, there are such difficulties as the lack of fundamental laws, poor measurability of social indicators, and a strong diversity of scales – from small social groups to ethnic groups, heterogeneity and non-linearity of the studied social objects. The process of interaction between individuals, collectives and organized masses is a complex synergetic system of dependent variables and the behavior of this system can change dramatically under certain external conditions, leading to various kinds of extreme (crisis) situations, to changes on a macroscopic scale.

Key words: dynamic model, social process, inter-ethnic relations, communication field, system of information, non-linear system of equations.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-135-142

Original article submitted: 30.07.2020

Revision submitted: 15.06.2020

For citation. Kenetova R. O. About some models of interaction of social groups. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **32**: 3, 135-142. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-135-142

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Acknowledgments. The authors are deeply grateful to the referee for a number of comments that contributed to the improvement of the article.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Kenetova R. O., 2020

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors