УДК 517.956.6

Научная статья

Краевая задача со смещением для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области

Р. Т. Зуннунов¹, И. У. Хайдаров²

¹ Институт Математики имени В. И. Романовского Академии наук Узбекистана, г. Ташкент, ул. Университетская 4 Б, 100170, Республика Узбекистан

² Ферганский государственный университет, г. Фергана, ул. Мураббийлар 19, 150100, Республика Узбекистан.

E-mail: zunnunov@mail.ru, ibrohimbek@mail.ru

В данной работе для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области эллиптическая часть которой является горизонтальной полосой исследуется задача со смещением на характеристиках разных семейств. Единственность решения задачи доказывается методом интегралов энергии, а существование решения задачи методом функций Грина и методом интегральных уравнений.

Ключевые слова: задача со смещением, обобщенное уравнение Трикоми, уравнение смешанного типа, неограниченная область, метод функций Грина, метод интегральных уравнений, метод интегралов энергии.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-55-64

Поступила в редакцию: 10.09.2020

В окончательном варианте: 10.10.2020

Для цитирования. Зуннунов Р. Т., Хайдаров И. У. Краевая задача со смещением для обобщенного уравнения Трикоми со спектральным параметром в неограниченной области // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 32. № 3. С. 55-64. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-55-64

Контент публикуется на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Зуннунов Р. Т., Хайдаров И. У., 2020

Введение

В большинстве работ, где изучены задачи со смещением для уравнений смешанного типа, рассмотрены модельные уравнения или линейные уравнения со специально подобранными коэффициентами при младших производных. Как известно, А. М. Нахушевым в 1970 году доказано [1], что коэффициенты уравнения при младших членах существенно влияют на постановку и исследование краевых задач со смещением. В самом деле, из задач, впервые изученных в 1969 году [2], видно, что при постановке задач со смещением для уравнения колебаний струны использован оператор $sign(x - a)(d/dx)$, а в случае уравнений

$$u u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$$

— операторы дробного дифференцирования D_{ax}^α . В нашем же случае, при постановке и исследовании задач со смещением для уравнений с младшими членами возникают операторы более сложной структуры [3].

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$\operatorname{sign} y |y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda^2 |y|^m u = 0, \quad m = \operatorname{const} > 0, \quad (1)$$

в неограниченной смешанной области $\Omega = \Omega_1 \cup AB \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, 0 < y < 1\}$, $AB = \{(x, y) : -1 < x < 1, y = 0\}$, а Ω_2 — область полуплоскости $y < 0$, ограниченная отрезком AB и характеристиками

$$AC : x - [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = -1, \quad BC : x + [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2} = 1$$

уравнения (1), λ — заданное действительное число, причем $\lambda = \lambda_j$ в Ω_j , при $j = 1, 2$.

Введем обозначения: $\beta = m/(2m+4)$, $l_0 = \{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y = 1\}$,

$$l_1 = \{(x, y) : -\infty < x < -1, y = 0\}, \quad l_2 = \{(x, y) : 1 < x < +\infty, y = 0\},$$

$$\theta_{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{2}, -\left[\frac{m+2}{2} \cdot \frac{x+1}{2} \right]^{\frac{2}{m+2}} \right), \quad \theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}, -\left[\frac{m+2}{2} \cdot \frac{1-x}{2} \right]^{\frac{2}{m+2}} \right).$$

Очевидно, что $\theta_{-1}(x)$ и $\theta_1(x)$ есть точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0) \in AB$, с характеристиками AC и BC соответственно.

Задача TD^∞ . Найти функцию $u(x, y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x, y) \in C(\Omega \cup l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, причем в окрестности точек $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ функции $y^m u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ могут иметь особенность порядка меньше $1 - 2\beta$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω_1 и Ω_2 ;

3) удовлетворяет условиям

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad -\infty < x \leq -1; \quad u(x, 0) = \psi_2(x), \quad 1 \leq x < +\infty;$$

$$u(x, 1) = \psi_3(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, y) = 0, \text{ равномерно по } y \in [0, 1], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} a(x) A_{-1x}^{1, \lambda_2} \left\{ D_{-1x}^\beta (1+x)^{2\beta-1} [u(\theta_{-1}(x))] \right\} + b(x) A_{1x}^{1, \lambda_2} \left\{ D_{1x}^\beta (1-x)^{2\beta-1} [u(\theta_1(x))] \right\} = \\ = c(x) u(x, 0) + d(x), \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (4)$$

где $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\psi_3(x)$, $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ — заданные функции, причем $a^2(x) + b^2(x) \neq 0$, $-1 \leq x \leq 1$. При постановке и исследовании этой задачи для уравнения (1) мы будем пользоваться свойствами следующего интегрального оператора [3]:

$$A_{sx}^{1, \lambda} [f(x)] \equiv f(x) - \int_s^x f(t) \left(\frac{t-s}{x-s} \right) \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\lambda \sqrt{(x-s)(x-t)} \right] dt.$$

Единственность решения задачи TD^∞

Пусть $u(x, y)$ решение задачи TD^∞ . Введем обозначения $u(x, 0) = \tau(x)$, $-1 \leq x \leq 1$; $u_y(x, 0) = v(x)$, $-1 < x < 1$ и предположим, что $\tau(x) \in C[-1, 1] \cap C^2(-1, 1)$, $v(x) \in C^2(-1, 1)$ и $v(x)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше $1 - 2\beta$ при $x \rightarrow -1$ и $x \rightarrow 1$. Тогда решение задачи TD^∞ в области Ω_2 представимо в виде [4]

$$u(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \frac{\tau[x + \sigma(2t - 1)]}{[t(1 - t)]^{1-\beta}} \bar{I}_{\beta-1} \left[2\lambda \sigma \sqrt{t(1-t)} \right] dt + \\ + \gamma_2 \int_0^1 \frac{v[x + \sigma(2t - 1)]}{[t(1 - t)]^\beta} \bar{I}_{-\beta} \left[2\lambda \sigma \sqrt{t(1-t)} \right] dt, \quad (5)$$

где $\sigma = [2/(m+2)](-y)^{(m+2)/2}$, $\gamma_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma^2(\beta)$, $\gamma_2 = \Gamma(2-2\beta)/\Gamma^2(1-\beta)$, $\bar{I}_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)(z/2)^{-\alpha} I_\alpha(z)$ где $I_\alpha(z)$ — называется модифицированной функцией Бесселя [5].

Пользуясь формулой (5), аналогично как в работе [3] получим

$$u[\theta_{-1}(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) (1+x)^{1-2\beta} D_{-1x}^{-\beta} B_{-1x}^{1, \lambda_2} \left[(1+x)^{\beta-1} \tau(x) \right] - \\ - (2-4\beta)^{2\beta-1} \gamma_2 \Gamma(1-\beta) D_{-1x}^{\beta-1} B_{-1x}^{1, \lambda_2} \left[(1+x)^{-\beta} v(x) \right], \\ u[\theta_1(x)] = \gamma_1 \Gamma(\beta) (1-x)^{1-2\beta} D_{1x}^{-\beta} B_{1x}^{1, \lambda_2} \left[\tau(x) (1-x)^{\beta-1} \right] - \\ - (2-4\beta)^{2\beta-1} \gamma_2 \Gamma(1-\beta) D_{1x}^{\beta-1} B_{1x}^{1, \lambda_2} \left[v(x) (1-x)^{-\beta} \right].$$

Умножая обе части этих равенств на $(1+x)^{2\beta-1}$ и $(1-x)^{2\beta-1}$, а затем применяя операторы $A_{-1x}^{1, \lambda_2} D_{-1x}^\beta$ и $A_{1x}^{1, \lambda_2} D_{1x}^\beta$ соответственно, получим

$$A_{-1x}^{1, \lambda_2} \left\{ D_{-1x}^\beta \left[(1+x)^{2\beta-1} u(\theta_{-1}(x)) \right] \right\} = \\ = [\Gamma(2\beta)/\Gamma(\beta)] (1+x)^{2\beta-1} \left\{ \tau(x) - \gamma_3 \int_{-1}^x v(t) (x-t)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta} [\lambda_2(x-t)] dt \right\}, \quad (6)$$

$$A_{1x}^{1, \lambda_2} \left\{ D_{1x}^\beta \left[(1-x)^{2\beta-1} u(\theta_1(x)) \right] \right\} = \\ = [\Gamma(2\beta)/\Gamma(\beta)] (1-x)^{2\beta-1} \left\{ \tau(x) - \gamma_3 \int_x^1 v(t) (t-x)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta} [\lambda_2(t-x)] dt \right\}. \quad (7)$$

Подставляя (6) и (7) в условие (4) и умножая обе части полученного равенства на $[(1-x^2)]^{1-\beta} \Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)$, получим основное функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$ на AB , из области Ω_2 :

$$p(x) \tau(x) = [\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)] [(1-x^2)]^{1-\beta} d(x) +$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma_3(1-x)^{1-\beta}a(x)\int_{-1}^x v(t)(x-t)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(x-t)]dt+ \\
& +\gamma_3(1+x)^{1-\beta}b(x)\int_x^1 v(t)(t-x)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(t-x)]dt, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (8)
\end{aligned}$$

где $p(x) = (1-x)^{1-\beta}a(x) + (1+x)^{1-\beta}b(x) - [\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)] [(1-x^2)]^{1-\beta}c(x)$, $\gamma_3 = [(2-4\beta)^{2\beta}\Gamma(\beta)] / [2\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)]$, $\bar{J}_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)(z/2)^{-\alpha}J_\alpha(z)$, $J_\alpha(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка α [5].

Теорема 1. Пусть функции $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ удовлетворяют условиям

$$a(x) = (1+x)^{1-\beta+\varepsilon}a_0(x), \quad b(x) = (1-x)^{1-\beta+\varepsilon}b_0(x), \quad c(x) = [(1-x^2)]^\varepsilon c_0(x); \quad (9)$$

$$a_0(x), b_0(x), c_0(x) \in C^1[0, 1];$$

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= (1+x)^\varepsilon a_0(x) + (1-x)^\varepsilon b_0(x) - \\
&- [\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)] [(1-x^2)]^\varepsilon c_0(x) \neq 0, \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (10)
\end{aligned}$$

$$[(1+x)^\varepsilon a_0(x)/p_0(x)]' \leq 0, \quad [(1-x)^\varepsilon b_0(x)/p_0(x)]' \geq 0, \quad -1 < x < 1. \quad (11)$$

Тогда задача TD^∞ не может иметь более одного решения.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, рассмотрим следующую лемму.

Лемма. Если $u(x, y)$ — решение однородной задачи TD^∞ и выполнены условия теоремы 1, то справедливо неравенство

$$\Delta = \int_{-1}^1 \tau(x)v(x)dx \geq 0.$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение однородной задачи TD^∞ . Тогда, согласно (8), справедливо равенство

$$\begin{aligned}
p(x)\tau(x) &= \gamma_3(1-x)^{1-\beta}a(x)\int_{-1}^x v(t)(x-t)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(x-t)]dt+ \\
& +\gamma_3(1+x)^{1-\beta}b(x)\int_x^1 v(t)(t-x)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(t-x)]dt, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (12)
\end{aligned}$$

Принимая во внимание условия (9) и (10), из (12) находим

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= \gamma_3 a_1(x) \int_{-1}^x v(t)(x-t)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(x-t)]dt+ \\
& +\gamma_3 b_1(x) \int_x^1 v(t)(t-x)^{-2\beta}\bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(t-x)]dt, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (13)
\end{aligned}$$

где $a_1(x) = (1+x)^\epsilon a_0(x)/p_0(x)$, $b_1(x) = (1-x)^\epsilon b_0(x)/p_0(x)$.

Подставляя функцию (13) в Δ , имеем

$$\begin{aligned}\Delta = & \gamma_3 \int_{-1}^1 v(x) a_1(x) dx \int_{-1}^x v(t) (x-t)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(x-t)] dt + \\ & + \gamma_3 \int_{-1}^1 v(x) b_1(x) dx \int_x^1 v(t) (t-x)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(x-t)] dt.\end{aligned}$$

Пользуясь формулами [5]

$$\begin{aligned}|x-t|^{-2\beta} &= \frac{1}{\Gamma(2\beta) \cos(\pi\beta)} \int_0^\infty z^{2\beta-1} \cos[z(x-t)] dz, \\ J_{-\beta}[\lambda_2(x-t)] &= \frac{[\lambda_2(x-t)]^{-\beta}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2-\beta)} \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-(1/2)} \cos[\lambda_2(x-t)] d\xi,\end{aligned}$$

из последнего равенства получим:

$$\begin{aligned}\Delta = & \gamma_4 \int_0^{+\infty} z^{2\beta-1} dz \int_{-1}^1 (1-\xi^2)^{-\beta-1/2} d\xi \times \\ & \times \left\{ \sum_{k=1}^2 \left[\left(\int_{-1}^1 v(t) \cos(z_k t) dt \right)^2 + \left(\int_{-1}^1 v(t) \sin(z_k t) dt \right)^2 \right] - \right. \\ & - \int_{-1}^1 a'_1(x) \sum_{k=1}^2 \left[\left(\int_{-1}^x v(t) \cos(z_k t) dt \right)^2 + \left(\int_{-1}^x v(t) \sin(z_k t) dt \right)^2 \right] dx + \\ & + \sum_{k=1}^2 \left[\left(\int_{-1}^1 v(t) \cos(z_k t) dt \right)^2 + \left(\int_{-1}^1 v(t) \sin(z_k t) dt \right)^2 \right] + \\ & \left. + \int_{-1}^1 b'_1(x) \sum_{k=1}^2 \left[\left(\int_x^1 v(t) \cos(z_k t) dt \right)^2 + \left(\int_x^1 v(t) \sin(z_k t) dt \right)^2 \right] dx \right\}.\end{aligned}$$

где $z_k = z + (-1)^k \lambda_2 \xi$, $\gamma_4 = [(2-4\beta)^{2\beta} \Gamma(\beta)] / [8\Gamma(1/2-\beta) \Gamma^2(\beta) \cos \pi\beta]$.

Отсюда, в силу условий (11) следует, что $\Delta \geq 0$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ - решение однородной задачи TN^∞ . Тогда в области Ω_1 справедливо тождество

$$(y^m u u_x)_x + (u u_y)_y - y^m (u_x)^2 - (u_y)^2 - y^m \lambda_1^2 u^2 = 0 \quad (14)$$

а на AB имеет место равенство (13).

Пусть $\Omega_{1R} = \{(x, y) : -R < x < R, 0 < y < 1\}$. Интегрируя тождество (14) по области Ω_{1R} , с учетом условия (3) и $\psi_n(x) \equiv 0$ ($n = \overline{1, 3}$), получим

$$\iint_{\Omega_1} [y^m(u_x)^2 + (u_y)^2 + \lambda_1^2 y^m u^2] dx dy + \int_{-1}^1 \tau(x) v(x) dx = 0. \quad (15)$$

В силу утверждения леммы, из (15) при $\lambda_1 \neq 0$ сразу следует, что $u(x, y) \equiv 0$ в $\Omega_1 \cup l_0 \cup l_1 \cup \overline{AB} \cup l_2$. Если $\lambda_1 = 0$, то из (15) получим $u(x, y) \equiv \text{const}$ в $\Omega_1 \cup l_0 \cup l_1 \cup \overline{AB} \cup l_2$. Учитывая условие (3) и $\psi_n(x) \equiv 0$ ($n = \overline{1, 3}$), и в этом случае, имеем $u(x, y) \equiv 0$ в $\Omega_1 \cup l_0 \cup l_1 \cup \overline{AB} \cup l_2$. Отсюда следует, что на AB $u(x, 0) = 0$, $u_y(x, 0) = 0$. Отсюда, согласно формуле (5), получим $u(x, y) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}_2$. Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in \Omega \cup l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$. Тем самым теорема 1 доказана. $\square$

Существование решения задачи TD^∞

Переходим к доказательству существования решения задачи TD^∞ . Пусть выполнены условия теоремы 1, а $u(x, y)$ - решение задачи TD^∞ . Тогда функция $u(x, y)$ в области Ω_2 представлена в виде (5), откуда в силу условия (4) следует, что на AB справедливо равенство (8). Функция $u(x, y)$ в области Ω_1 , можно найти как решение задачи Дирихле для уравнения (1), удовлетворяющее условиям $u(x, 1) = \psi_3(x)$ и $u(x, 0) = \tau_0(x)$, $-\infty < x < +\infty$, где

$$\tau_0(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & -\infty < x \leq -1; \\ \tau(x), & -1 \leq x \leq 1; \\ \psi_2(x), & 1 \leq x < +\infty \end{cases} \quad (16)$$

Решая задачу Дирихле в области Ω_1 методом функций Грина получим:

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_0(t) G_\eta(t, 0; x, y) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_3(t) G_\eta(t, 1; x, y) dt, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} G_\eta(t, 0; x, y) &= ky \left[(t-x)^2 + 4\alpha^2 y^{m+2} \right]^{\beta-1} + ky \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1^2}{4} \right)^n \frac{1}{(\beta)_n} \left[(t-x)^2 + 4\alpha^2 y^{m+2} \right]^{n+\beta-1} - \\ &\quad - \frac{\sqrt{y}}{\pi(m+2)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^\alpha \frac{K_\alpha(2\alpha\mu)}{I_\alpha(2\alpha\mu)} I_\alpha(2\alpha\mu y^{(m+2)/2}) e^{i\rho(t-x)} d\rho \\ G_\eta(t, 1; x, y) &= \frac{\sqrt{y}}{\pi(m+2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu K_{\alpha-1}(2\alpha\mu) I_\alpha(2\alpha\mu y^{(m+2)/2}) e^{i\rho(t-x)} d\rho + \\ &\quad + \frac{\sqrt{y}}{\pi(m+2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \frac{K_\alpha(2\alpha\mu)}{I_\alpha(2\alpha\mu)} I_{\alpha-1}(2\alpha\mu) I_\alpha(2\alpha\mu y^{(m+2)/2}) e^{i\rho(t-x)} d\rho \end{aligned}$$

где $k = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{m+2} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}$, $\mu^2 = \rho^2 + \lambda_1^2$, $\alpha = \frac{1}{m+2}$, а $K_\alpha(z)$ — функция Макдональда [5].

Учитывая (16), перепишем (17) в виде

$$u(x, y) = ky \int_{-1}^1 \tau(t) [(x-t)^2 + 4\alpha^2 y^{m+2}]^{\beta-1} dt + \int_{-1}^1 \tau(t) g(t; x, y) dt + \Phi(x, y),$$

где

$$\begin{aligned} g(t; x, y) &= ky \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1^2}{4} \right)^n \frac{1}{(\beta)_n} [(x-t)^2 + 4\alpha^2 y^{m+2}]^{n+\beta-1} - \\ &- \frac{\sqrt{y}}{\pi(m+2)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^\alpha \frac{K_\alpha(2\alpha\mu)}{I_\alpha(2\alpha\mu)} I_\alpha(2\alpha\mu y^{(m+2)/2}) e^{i\rho(t-x)} d\rho, \\ \Phi(x, y) &= \int_{-\infty}^{-1} \psi_1(t) G_\eta(t, 0; x, y) dt + \int_1^{+\infty} \psi_2(t) G_\eta(t, 0; x, y) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_3(t) G_\eta(t, 1; x, y) dt. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ y [(x-t)^2 + 4\alpha^2 y^{m+2}]^{\beta-1} \right\} = \frac{1}{1-2\beta} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (x-t) [(x-t)^2 + 4\alpha^2 y^{m+2}]^{\beta-1} \right\}$$

считая $y \neq 0$ и дифференцируя по y , а затем переходя к пределу при $y \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} v(x) &= -\frac{k}{1-2\beta} \left\{ \frac{d}{dx} \int_{-1}^x \frac{\tau(t) dt}{(x-t)^{1-2\beta}} - \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\tau(t) dt}{(t-x)^{1-2\beta}} \right\} + \\ &+ \int_{-1}^1 \tau(t) g_y(t; x, 0) dt + \Phi_1(x), \quad 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (18)$$

$$g_y(t; x, 0) = k \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^2}{4} \right)^n \frac{1}{(\beta)_n} [(t-x)]^{n+\beta-1} - \frac{\alpha^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{2\alpha} \frac{K_\alpha[2\alpha\mu]}{I_\alpha[2\alpha\mu]} e^{i\rho(t-x)} d\rho,$$

$$\Phi_1(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \Phi'_y(x, y).$$

Равенство (18) является основным функциональным соотношением между $\tau(x)$ и $v(x)$ на AB , из области Ω_1 .

В силу условия (9) равенство (8) переписывается в виде

$$\begin{aligned} p_0(x) \tau(x) &= [\Gamma(\beta) / \Gamma(2\beta)] d(x) + \\ &+ \gamma_3(1+x)^\varepsilon a_0(x) \int_{-1}^x v(t) (x-t)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(x-t)] dt + \\ &+ \gamma_3(1-x)^\varepsilon b_0(x) \int_x^1 v(t) (t-x)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(t-x)] dt, \quad -1 \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Следовательно, задача TD^∞ (в смысле разрешимости и в класса искомых функций) эквивалентна системе уравнений (18), (19). Если из этой системы однозначно

найдем функции $\tau(x)$ и $v(x)$ с требуемыми свойствами, то решение задачи TD^∞ в областях Ω_1 и Ω_2 , определяется формулами (17) и (5) соответственно. Поэтому, теперь займемся решением системы (18), (19).

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $a_0(x), b_0(x), c_0(x) \in C^2[-1, 1]$, $d(x) \in C[-1, 1] \cap C^2(-1, 1)$, $a_0(1) \cdot b_0(-1) \neq 0$, $\psi_1(-1) = \psi_2(1) = 0$, $\psi_1(x) \in C(-\infty, -1]$, $\psi_2(x) \in C[1; +\infty)$, $\psi_3(x) \in C(-\infty; +\infty)$ и при достаточно больших $|x|$ справедливы неравенства $|\psi_j(x)| \leq M|x|^{-\varepsilon}$, $j = \overline{1, 3}$. Тогда решение задачи TD^∞ существует.

Доказательство. Исключая функцию $v(x)$ из (18) и (19), получим

$$A(x)\tau(x) + \frac{B(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\tau(t)}{t-x} dt = \int_{-1}^1 Q_1(x, t) \tau(t) dt + F_1(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (20)$$

где

$$A(x) = p_0(x) + [(1+x)^\varepsilon a_0(x) + (1-x)^\varepsilon b_0(x)] \sin(\beta\pi), \quad (21)$$

$$B(x) = -[(1+x)^\varepsilon a_0(x) + (1-x)^\varepsilon b_0(x)] \cos(\beta\pi), \quad (22)$$

$$Q_1(x, t) = \frac{Q_2(x, t) - Q_2(x, x)}{t-x} + Q_3(x, t),$$

$$Q_2(x, t) = \left[(1+x)^\varepsilon a_0(x) \left(\frac{x+1}{t+1} \right)^{1-2\beta} + (1-x)^\varepsilon b_0(x) \left(\frac{1-x}{1-t} \right)^{1-2\beta} \right] \frac{\cos(\beta\pi)}{\pi},$$

$$Q_3(x, t) = |x-t|^{2\beta-1} Q_4(x, t)$$

,

$$Q_4(x, t) \in C(-1 \leq x, t \leq 1) \cap C^2(-1 < x, t < 1),$$

$$\begin{aligned} & + \gamma_3 (1+x)^\varepsilon a_0(x) \int_{-1}^x \Phi_1(t) (x-t)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(x-t)] dt + \\ & + \gamma_3 (1-x)^\varepsilon b_0(x) \int_x^1 \Phi_1(t) (t-x)^{-2\beta} \bar{J}_{-\beta}[\lambda_2(t-x)] dt. \end{aligned}$$

Очевидно, что $Q_1(x, t)$ — ядро со слабой особенностью, а на основании условий, наложенных на заданные функции, легко следует, что $F_3(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$.

Следовательно, задача TD^∞ эквивалентна в смысле разрешимости сингулярному интегральному уравнению (20), а в силу наложенных условий на заданные функции $A^2(x) + B^2(x) \neq 0, \forall x \in [-1, 1]$, то есть является уравнением нормального типа [6]. Его индекс равен нулю в классе функций ограниченных при $x \rightarrow \pm 1$. Регуляризируя уравнение (20) методом Карлемана-Векуа [7], получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода со слабой особенностью, безусловная разрешимость которой следует из теоремы 1.

Заключение

При $\lambda = 0$, учитывая что $A_{sx}^{1,0}[f(x)] = f(x)$ получим задачу исследованную в работе [7]. Из этой задачи в случае $a(x) \equiv b(x) \equiv 0$, $c(x) \neq 0$, $x \in [-1, 1]$ следует задача Дирихле для уравнения (Γ_λ^m) в области Ω_1 , а при $a(x) \neq 0$, $b(x) \equiv c(x) \equiv 0$, $x \in$

$[-1, 1]$; $\psi_1(-1) = 0$ и $b(x) \neq 0$, $a(x) \equiv c(x) \equiv 0$, $x \in [-1, 1]$; $\psi_2(1) = 0$ следует задача Трикоми в области Ω с заданными значениями искомой функции на $l_0 \cup l_1 \cup \overline{AC} \cup l_2$ и $l_0 \cup l_1 \cup \overline{BC} \cup l_2$ соответственно, которые представляют самостоятельный интерес.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

Список литературы/References

- [1] Нахушев А. М., “Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений на плоскости”, *Дифференциальные уравнения*, **6:1** (1970), 191-195. [Nakhushhev A. M., “Mrtodika postanovki korrektnikh zadach dlya giperbolicheskikh uravneniy na ploskosti”, *Differentsialniye uravneniya*, **6:1** (1970), 191-195].
- [2] Нахушев А. М., “О некоторых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа”, *Дифференциальные уравнения*, **5:1** (1969), 44-59. [Nakhushhev A. M., “O nekotorykh zadachakh dlya giperbolicheskikh uravneniy i uravneniy smeshannogo tipa”, *Differentsialniye uravneniya*, **5:1** (1969), 44-59].
- [3] Салахитдинов М. С., Уринов А. К., *Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром*, Фан, Ташкент, 1997, 166 с. [Salakhidinov M. S., Urinov A. K., *Krayevye zadachi dlya uravneniya smeshannogo tipa so spektralnim parametrom*, Fan, Tashkent, 1997, 166 pp.]
- [4] Капилевич М. Б., “Об одном уравнении смешанного эллиптического-гиперболического типа”, *Математический сборник*, **30(72):1** (1952), 11-38. [Kapilevich M. B., “Ob odnom uravnenii smeshannogo elliptiko-giperbolicheskogo tipa”, *Matimaticheskiy sbornik*, **30(72):1** (1952), 11-38].
- [5] Кузнецов М. С., *Специальные функции*, Высшая школа, М., 1965, 424 с. [Kuznesov M. S., *Spetsialniye funktsii*, Visshaya shkola, M., 1965, 424 pp.]
- [6] Мусхелишвили Н. И., *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, М., 1968, 512 с. [Muskhelishvili N. I., *Singulyarniye integralniye uravneniya*, Nauka, M., 1968, 512 pp.]
- [7] Зуннунов Р. Т., Толибжонов Ж. А., “Краевая задача со смещением для модельного уравнения смешанного типа в неограниченной области”, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, **30:1** (2020), 31-41. [Zunnunov R. T., Tolibjonov J. A., “Krayevye zadachi so smesheniyem dlya modelnogo uravneniya smeshannogo tipa v neogranichennoy oblasti”, *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskiye nauki*, **30:1** (2020), 31-41].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Нахушев А. М. Методика постановки корректных задач для линейных гиперболических уравнений на плоскости // *Дифференциальные уравнения*. 1970. Т. 6. №1. С. 191-195.
- [2] Нахушев А. М. О некоторых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // *Дифференциальные уравнения*. 1969. Т. V. №1. С. 44-59.
- [3] Салахитдинов М. С., Уринов А. К. Краевые задачи для уравнения смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997. 166 с.
- [4] Капилевич М. Б. Об одном уравнении смешанного эллиптического-гиперболического типа // *Математический сборник*. 1952. Т. 30(72). №1. С. 11-38.
- [5] Кузнецов М. С. Специальные функции. М.: Высшая школа, 1965. 424 с.
- [6] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
- [7] Зуннунов Р. Т., Толибжонов Ж. А. Краевая задача со смещением для модельного уравнения смешанного типа в неограниченной области // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2020. Т. 30. №2. С. 31-41.

MSC 35M12

Research Article

A boundary value problem with a displacement for the generalized equation of Triкоми with a spectral parameter in an unbounded domain

R. T. Zunnunov¹, I. U. Khaydarov²

¹ Institute of Mathematics named after V. I. Romanovskiy, Academy of Sciences of Uzbekistan, Academy of Sciences of Uzbekistan

² Fergana State university, Uzbekistan.

E-mail: zunnunov@mail.ru, ibrohimbek@mail.ru

In this paper, for the generalized Tricomi equation with a spectral parameter in an unbounded domain, the elliptical part of which is a horizontal strip, we study a problem with a shift on the characteristics of different families. The uniqueness of the solution to the problem is proved by the method of energy integrals, and the existence of the solution to the problem by the method of Green's functions and the method of integral equations.

Key words: problem with displacement, generalized Tricomi equation, mixed-type equation, unbounded domain, method of Green's functions, method of integral equations, method of energy integrals.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-55-64

Original article submitted: 10.09.2020

Revision submitted: 10.10.2020

For citation. Zunnunov R. T., Khaydarov I. U. A boundary value problem with a displacement for the generalized equation of Triкоми with a spectral parameter in an unbounded domain. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **32**: 3, 55-64. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-55-64

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Acknowledgments. The authors are deeply grateful to the referee for a number of comments that contributed to the improvement of the article.

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

© Zunnunov R. T., Khaydarov I. U., 2020

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors