Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 32. № 3. С. 29-41. ISSN 2079-6641

УДК 517.956.322 Научная статья

Краевая задача на полупрямой для псевдопараболического уравнения с малым параметром

Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т.

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, 720033,
г. Бишкек, ул. Фрунзе, 547
E-mail: ablabekov_63@mail.ru, ajzat.mukanbetova.85@mail.ru

Данная статья посвящена построению классического решения краевой задачи на полупрямой для линейного псевдопараболического уравнения с малым параметром. Для построения явного решения используется метод преобразование Фурье.В работе исследуется вопрос об однозначной разрешимости начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром на полуоси. Получено явное аналитическое решение поставленной задачи.

Ключевые слова: начально-краевая задача, псевдопараболическое уравнение, преобразование Фурье, малый параметр, однозначная разрешимость.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41

Поступила в редакцию: 24.07.2020 В окончательном варианте: 12.10.2020

Для цитирования. Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. Краевая задача на полупрямой для псевдопараболического уравнения с малым параметром // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 32. № 3. С. 29-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41

Введение

Уравнениями Соболевского типа называются уравнения вида

$$A_0 D_t^l u(x,t) + \sum_{k=0}^{l-1} A_{l-k} D_t^k u(x,t) = f(x,t), \tag{0.1}$$

где $A_0, A_1, ..., A_l$ — линейные дифференциальные операторы по пространственным переменным, D_t^l — оператор дифференцирования l-го порядка по переменной t.

Важным классом уравнений Соболевского типа является уравнения третьего порядка, которое описывает процесс фильтрации жидкости в трещиновато-пористой среде [1]:

$$\beta_0 p_t - div\left(\frac{k}{\mu} grad p + \frac{k}{\alpha} grad p_t\right) = f(x,t), \tag{0.2}$$

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

где p — давление в трещинах, k — коэффициент проницаемости трещин, α — коэффициент, характеризующий обмен жидкости между блоками(порами) и трещинами, μ — вязкость жидкости, β_0 — суммарный коэффициент сжимаемости, равный $\beta_1+m\beta_2$, β_1 — коэффициент сжимаемости блоков, β_2 — коэффициент сжимаемости жидкости, m — пористость блоков, f — инфильтрация.

Уравнение (0.2) относится к псевдопараболическому уравнению. Исследованию различных смешанных задач и задачи Коши для одномерного уравнения фильтрации однородной жидкости в трещиновато-пористой среде посвящены работы [2, 3]. В частности, в работе [2] применeняя синус-преобразование Фурье, найдено явное решение смешанной задачи в полубесконечной трещинавато-пористой среде, а в работе [3] с помощью фундаментального решения оператора фильтрации однородной жидкости в трещинавато-пористой среде построено решение смешанной задачи, задачи Гурса и задачи Коши. В работах [4]-[6] методом Фурье исследованы первые и вторые начально-краевые задачи для псевдопараболического уравнения

$$u_t(x,t)-\alpha u_{xxt}(x,t)-\beta u_{xx}(x,t)=f(x,t), \tag{0.3}$$

где $\alpha,\ \beta>0-const$.

Уравнение вида (0.3) при определенных физических допущениях описывает одномерное движение почвенной влаги и называется модифициорованным уравнением Аллера [7, 8]. В работах [9]-[14] разным методами исследованы локальные, нелокальные и краевые задачи для псевдопараболического уравнения. Исследованию краевых задач для нагруженного псевдопараболического уравнения посвящены работы [6, 15].

Постановка задачи

Сначала введем необходимые обозначения и определения. Пусть $Q_T^+=\{(x,t):x\in(0,+\infty),t\in(0,T)\}$. $C^{(n,m)}(Q_T^+)$ - пространство функций $v(x,t)$, определенных в Q_T^+ и таких, что $D_x^kD_t^lv\in C(\bar{Q}_T^+)$, $0\le k\le n$, $0\le l\le m$.

Определение 1. Будем говорить, что функция $v(x,t)$ принадлежит классу $M_\gamma(Q_T^+)$, если существует вещественное число $\gamma\ge 0$ и непрерывная положительная функция $C(t)$ такие, что имеет место оценка

$$|v(x,t)|\le C(t)exp\{\gamma|x|\},x\in[0,+\infty),0\le t\le T.$$

Через $C_{M_\gamma}^{(n,m)}(Q_T^+)$ будем обозначать пространство функций из $C^{(n,m)}(Q_T^+)$, которые вместе со своими производными вплоть до порядка (n,m) принадлежат $M_\gamma(Q_T^+)$, т.е. $D_x^kD_t^lv\in M_\gamma(Q_T)$, $0\le k\le n$, $0\le l\le m$.

Аналогично определяется пространство $C_{M_\gamma}^{(n)}(R_+)$

В области Q_T^+ рассмотрим краевую задачу для псевдопараболического уравнения

$$Lu(x,t)\equiv u_t(x,t)-\alpha^2u_{xxt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x,t),(x,t)\in Q_T^+, \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),x\in[0,+\infty), \tag{2}$$

$$u(0,t)=h(t),0\le t\le T, \tag{3}$$

где $\alpha > 0$ — малый параметр. Задача (1)-(3) является сингулярным возмущением краевой задачи на полуоси для параболического уравнения

$$\begin{cases} v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t), (x,t) \in Q_T^+, \\ v(x,0) = u_0(x), x \in [0,+\infty), \\ v(0,t) = h(t), 0 \le t \le T. \end{cases} \tag{4}$$

Определение 2. Функцию $u(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+)$ будем называть классическим решением задачи (1)-(3), если она удовлетворяет уравнению (1), начальному условию (2) и граничному условию (3) в обычном смысле.

Однозначная разрешимость задачи

Для задачи (1) -(3) справедлива

Теорема 1. *Если* $u_0(x) \in C_{M_\gamma}^2[0,+\infty), f(x,t) \in C_{M_\gamma}^{(1,0)}(Q_T^+), h(t) \in C^1[0,T]$ *при* $\gamma < T - a$ *и* $f(0,t) = 0, u_0(0) = h(0) = 0$*, то задача (1)-(3) в области* Q_T^+ *имеет единственное классическое решение, принадлежащее* $C_{M_\gamma}^{(2,1)}(Q_T^+)$*. Это решение имеет вид*

$$u(x,t) = \int\limits_0^\infty [G(x-s,t) - G(x+s,t)]u_0(s)ds + e^{\frac{-x}{\alpha}}h(t) +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^t h(\tau)\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty [G_\alpha(x-s,t-\tau) - G_\alpha(x+s,t-\tau)]f(s,\tau)dsd\tau. \tag{5}$$

где

$$G(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)cos\xi xd\xi, \tag{6}$$

$$G_\alpha(x,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\frac{cos\xi x}{1+\alpha^2\xi^2}d\xi. \tag{7}$$

Доказательство. К уравнению (1) и условию (2) применяем синус-преобразование Фурье по переменной x. В результате получаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}(\xi,t)}{dt} + \frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}\tilde{u}(\xi,t) = \frac{1}{1+\alpha^2\xi^2}\left[\tilde{f}(\xi,t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\xi(\alpha^2 h'(t) + h(t))\right], \\ \tilde{u}(\xi,0) = \tilde{u}_0(\xi), \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\tilde{u}_0(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u_0(x)\sin\xi xdx, \tilde{f}(\xi,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty f(x,t)\sin\xi xdx,$$

$$\tilde{u}(\xi,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u(x,t)\sin\xi x dx.$$

Решение задачи (8), как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, дается формулой

$$\tilde{u}(\xi,t)=\tilde{u}_0(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)+\frac{1}{1+\alpha^2\xi^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \tilde{f}(\xi,\tau)\exp(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-$$

$$-\tau))d\tau+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\alpha^2\xi}{1+\alpha^2\xi^2}h(t)+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\int\limits_0^t h(\tau)\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)d\tau.$$

Отсюда, используя формулу обратного синус преобразования Фурье, будем иметь

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \tilde{u}_0(\xi)\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\sin\xi x dx+h(t)\cdot\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\alpha^2\xi}{1+\alpha^2\xi^2}\sin\xi x d\xi+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^t h(\tau)\left[\int\limits_0^\infty\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\sin\xi x d\xi\right]d\tau+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty \tilde{f}(\xi,\tau)\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\sin\xi x}{1+\alpha^2\xi^2}d\xi d\tau=$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)\sin\xi x\sin\xi s d\xi\right]u_0(s)ds+e^{-\frac{x}{\alpha}}h(t)+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^t h(\tau)\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{1+\alpha^2\xi^2}d\xi d\tau+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\left[\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\sin\xi x\sin\xi s}{1+\alpha^2\xi^2}d\xi\right]f(s,\tau)dsd\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)[cos\xi(x-s)-cos\xi(x+s)]d\xi\right]u_0(s)ds+$$

$$e^{-\frac{x}{\alpha}}h(t)+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^t h(\tau)\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{1+\alpha^2\xi^2}d\xi d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\left[\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{[cos\xi(x-s)-cos\xi(x+s)]}{1+\alpha^2\xi^2}d\xi\right]f(s,\tau)dsd\tau.$$

Отсюда, с учетом обозначений (6), (7) следует формула (5). □

Рассмотрим некоторые свойства функции $G_a(x,t)$, которые сформулируем в виде следующих лемм:

Лемма 1. *Имеют место следующие равенства:* $G_\alpha(x,0) = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{\alpha}}$, $G_\alpha(0,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{a^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2\eta^2}}\exp(-\eta^2 t)d\eta$, $\left(\alpha^2\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x\partial t} + \frac{\partial G_\alpha}{\partial x}\right)(0,t) = 0$.

Доказательство.

Преобразуем функцию $G_a(x,t)$ к виду:

$$G_\alpha(x,0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2\xi^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)cos\xi x d\xi.$$

Тогда

$$G_\alpha(x,0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{cos\xi x}{1+\alpha^2\xi^2}d\xi.$$

Отсюда, вводя обозначение $y = \alpha\xi$ и используя таблицу из [16, с. 536]:

$$\int\limits_0^\infty \frac{coszx}{a^2+x^2}dz = \frac{\pi}{2a}e^{-ax},$$

равен $\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{\alpha}}$.

$$G_\alpha(0,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2\xi^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)d\xi,$$

то, вводя новую переменную интегрирования по формуле $\eta = \frac{\xi}{\sqrt{1+\alpha^2\xi^2}}$, получим

$$G_\alpha(0,t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{1}{\alpha^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2\eta^2}}\exp(-\eta^2 t)d\eta.$$

Так как интеграл

$$\left(\alpha^2\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x\partial t} + \frac{\partial G_\alpha}{\partial x}\right)(x,t) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t\right)d\xi$$

сходится равномерно, то положив $x = 0$, получим

$$\left(\alpha^2\frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial x\partial t} + \frac{\partial G_\alpha}{\partial x}\right)(0,t) = 0.$$

□

Лемма 2. *При любых* $p,q > 0$ *справедлива оценка*

$$|D_t^p D_x^q G_\alpha(x,t)| \leq \frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}}{2\alpha}\left[(-\alpha^{-2})^p(1+(-\alpha^{-2})t)^p((-\alpha^{-2})^q(2+(\alpha^{-3}x))^q)\right] \qquad (9)$$

Доказательство.

Пользуясь разложением в ряд Тейлора

$$e^{-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t} = e^{-\frac{t}{\alpha^2}} e^{\frac{t}{\alpha^2(1+\alpha^2\xi^2)}} = e^{-\frac{t}{\alpha^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha^{-2}t)^k}{k!}(1+\alpha^2\xi^2)^{-k},$$

представим функции $G_\alpha(x,t)$ в виде

$$G_\alpha(x,t) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{t}{\alpha^2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha^{-2}t)^k}{k!} \int\limits_0^{\infty} \frac{cos\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^{k+1}} d\xi. \tag{10}$$

Рассмотрим интеграл в (10) при любом $k = 0,1,2,....$ Используя табличный интеграл [17, с. 427]:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{cosax}{(b^2+x^2)^n} dx = \frac{\pi e^{-ab}}{(2b)^{2n-1}(n-1)!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(2n-i-2)!}{i!(n-i-1)!}(2ab)^i,$$

из (10) находим

$$G_\alpha(x,t) = \frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{t}{4\alpha^2}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{(2k-i)!}{i!(k-i)!}(2\alpha^{-1}x)^i.$$

Отсюда, переставляя порядок суммирования и вводя во внутренней сумме новый индекс суммирования, изменяющийся от нуля, имеем

$$G_\alpha(x,t) = \frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}}{2\alpha} \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^{-3}xt)^k}{k!} \frac{(\alpha^{-2}t)^m}{m!} \frac{(2m+k)!}{2^{2m+k}(k+m)!^2}.$$

Учитывая справедливость неравенства

$$\frac{(k+2m)!}{(k+m)!^2} \le 2^{(k+2m)}, k,m = 0,1,2,... \tag{11}$$

имеем

$$|G_\alpha(x,t)| \le \frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}}{2\alpha} \sum_{k,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha^{-2}t)^m}{m!} \frac{(\alpha^{-3}xt)^k}{k!} \le \frac{e^{\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}}{2\alpha}, \tag{12}$$

т.е. получили оценку (9) при $p = q = 0$. Докажем теперь оценку (9) при $p > 0, q = 0$. Используя формулу Лейбница, имеем

$$\frac{\partial^p G_\alpha(x,t)}{\partial t^p} = \sum_{i=0}^{p} C_p^i \frac{(-\alpha^{-2})^p e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}}{2\alpha}\cdot$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{i} C_i^j \left[\sum_{m=i}^{\infty} \frac{(\alpha^{-2}t)^{m-i}}{(m-i)!} \cdot \sum_{k=i-j}^{\infty} \frac{(\alpha^{-3}t)^{k-i}(\alpha^{-3}x)^k}{(k-i+j)!} \frac{(2m+k)!}{(k+m)!^2} \right].$$

Отсюда, в силу неравенств (11), (12), получаем

$$\left|\frac{\partial^p G_\alpha(x,t)}{\partial t^p}\right| \leq \frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}(\alpha^{-2})^p}{2\alpha}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{i}C_p^i C_i^j\sum_{k,m=0}^{\infty}\frac{(\alpha^{-2}t)^m(\alpha^{-3}tx)^k(a^{-3}x)^{i-j}}{m!k!} =$$

$$\frac{e^{-\frac{|x|(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}(\alpha^{-2})^p}{2\alpha}\sum_{i=0}^{p}C_p^i\sum_{j=0}^{i}C_i^j(a^{-3}x)^{i-j} = \frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}(\alpha^{-2})^p}{2\alpha}\sum_{i=0}^{p}C_p^i(1+(\alpha^{-3}x))^i =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}(\alpha^{-2})^p}{2\alpha}(2+(\alpha^{-3}x))^p.$$

Итак, получили оценку (9) при $p > 0, q = 0$. Аналогично, дифференцируя по x до порядка q, получаем

$$\frac{\partial^q G_\alpha(x,t)}{\partial x^q} = \frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}}{2\alpha}\sum_{i=0}^{p}C_q^i(-\alpha^{-2})^{q-i}\left[\sum_{k=i}^{\infty}\frac{(\alpha^{-2}t)^k}{k!^2}\sum_{m=i}^{k}\frac{(a^{-3})^m x^{m-i}}{(m-j)!}\frac{(2m-k)!}{(k-m)!}\right].$$

Тогда, используя еще раз неравенства (11), (12), имеем

$$\left|\frac{\partial^q G_\alpha(x,t)}{\partial x^q}\right| \leq \frac{e^{-\frac{t+x}{\alpha^2}}(a^{-2})^q}{2\alpha}\sum_{i=0}^{q}C_q^i\sum_{m=i}^{\infty}\frac{(\alpha^{-3}x)^{m-i}}{(m-i)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha^{-2}t)^{k+m}}{k!} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}(\alpha^{-2})^q}{2\alpha}\sum_{i=0}^{q}C_q^i(\alpha^{-2}t)^i = \frac{e^{-\frac{x(1-\alpha^{-1}t)}{\alpha^2}}(\alpha^{-2})^q}{2\alpha}\left(1+(\alpha^{-2}t)\right)^q.$$

Таким образом, получили оценку $q > 0, p = 0$. Аналогично доказывается для любых $p > 0, q > 0$ справедливость неравенства (9). □

Введем обозначения

$$u_1(x,t) = \int_0^\infty [G(x-s,t) - G(x+s,t)]\,u_0(s)ds,$$

$$u_2(x,t) = \int_0^t\int_0^\infty [G_\alpha(x-s,t-\tau) - G_\alpha(x+s,t-\tau)]f(s,\tau)dsd\tau,$$

$$u_3(x,t) = e^{-\frac{x}{\alpha}}h(t) + \frac{2}{\pi}\int_0^t h(\tau)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{1+\alpha^2\xi^2}d\xi d\tau.$$

Оценим функцию $u_1(x,t)$ при $(x,t) \in \bar{Q}_T^+$. Так как $u_0(x) \in C^2_{M_\gamma}[0,+\infty)$ то с учетом (9), (8) имеем

$$u_1(x,t) \leq \int_0^\infty [|G(x-s,t)| + |G(x+s,t)|]\,u_0(s)ds \leq$$

$$\leq C\int_0^\infty e^{\gamma|s|}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}t}[cos\xi(x-s) + cos\xi(x-s)]d\xi ds \leq \frac{C}{\alpha - T}.$$

Покажем, что для функции $u_1(x,t)$ будет выполнено $u_1(x,t)|_{t=0}=u_0(x)$.

Действительно, из вида функции $G(x,t)$ и свойства дельта функции Дирака, имеем

$$u_1(x,0)=\int\limits_0^\infty [G(x-s,0)-G(x+s,0)]\,u_0(s)ds=\int\limits_0^\infty \delta(x-s)u_0(s)ds=u_0(x).$$

Аналогично, из условия $f(x,t)\in C^{(1,0)}_{M_\gamma}(\bar{Q}^+_T)$, следует $u_2(x,t)\in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(\bar{Q}^+_T)$. Действительно

$$|u_2(x,t)|\le\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty[|G_\alpha(x-s,t-\tau)|+|G_\alpha(x+s,t-\tau)|]f(s,\tau)dsd\tau\le$$

$$\le\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty(|G(x-s,t-\tau)|+|G(x+s,t-\tau)|)\,|f(s,\tau)|dsd\tau\le$$

$$\le\int\limits_0^t\frac{C(\tau)}{2\alpha}\int\limits_0^\infty e^{\gamma|s|}\left[e^{\frac{|x-s|(1-\alpha^{-1}(t-\tau))}{\alpha^2}}+e^{\frac{|x+s|(1-\alpha^{-1}(t-\tau))}{\alpha^2}}\right]dsd\tau.$$

Выполнив в первом интеграле замену $s=y-x$ а во втором $-s=y+x$ преобразуем его

$$|u_2(x,t)|\le\int\limits_0^t\frac{C(\tau)}{2\alpha}\left[\int\limits_x^\infty e^{\gamma|s|}e^{\frac{y(1-\alpha^{-1}(t-\tau))}{\alpha^2}}dy+e^{\gamma|s|}\int\limits_{-\infty}^{-x}e^{\frac{y(1-\alpha^{-1}(t-\tau))}{\alpha^2}}dy\right]d\tau.$$

Из этой оценки следует, что $u_2(x,t)|_{t=0}=0$ Для непрерывности функции $u_3(x,t)$ достаточно показать, что несобственный интеграл

$$\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi d\tau$$

сходится равномерно. Действительно, так как

$$\left|\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\right|<\frac{\xi}{(1+a^2\xi^2)^2},$$

то несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi$ сходится.

$$|u_3(x,t)|=e^{-\frac{x}{\alpha}}|h(t)|+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^t|h(\tau)|\int\limits_0^\infty\exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right)\left|\frac{\xi\sin\xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}\right|d\xi d\tau\le$$

$$\le e^{-\frac{x}{\alpha}}|h(t)|+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^t|h(\tau)|\int\limits_0^\infty\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi d\tau\le e^{-\frac{x}{\alpha}}|h(t)|+C_1\int\limits_0^t|h(\tau)|d\tau,$$

где

$$C_1=\int\limits_0^\infty\frac{\xi}{(1+\alpha^2\xi^2)^2}d\xi$$

С другой стороны, учитывая ограниченность несобственного интеграла получим

$$\lim_{x\to+0} u_3(x,t) = \lim_{x\to+0} e^{-\frac{x}{\alpha}} h(t) +$$

$$\frac{2}{\pi} \lim_{x\to+0} \int\limits_0^t h(\tau) \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right) \frac{\xi \sin \xi x}{(1+\alpha^2\xi^2)^2} d\xi d\tau = h(t).$$

Так как $f(x,t) \in C^{(1,0)}_{M_\gamma}(Q^+_T), u_0(x) \in C^2_{M_\gamma}[0,+\infty)$, то используя теоремы о непрерывности и непрерывной дифференцируемости интегралов, зависящих от параметра, а также оценку (9) заключаем, что $u(x,t) \in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q^+_T)$. Таким образом, мы доказали, что функция $u(x,t)$ определенная формулой (5), является классическим решением задачи (1)-(3).

Теорема 2. *При условиях теоремы 1 относительно функций $f(x,t)$, $u_0(x), h(t)$, решение задачи (1)-(3) при $\alpha \to 0$ равномерно сходится к решению задачи (4).*

Доказательство.

Действительно, пусть функции $f(x,t), u_0(x), h(t)$, таковы, что решение задачи (4) имеет непрерывную производную υ_{xxt} при $u(x,t) \in Q^+_T$ и такую, что $|\upsilon_{xxt}| \in C^{(2,1)}_{M_\gamma}(Q^+_T)$. Пусть является решением задачи (1)-(3). Рассмотрим функцию $\omega_\alpha(x,t) = u_\alpha(x,t) - \upsilon(x,t)$, являющуюся решением следующей задачи

$$\omega_{\alpha t}(x,t) - \alpha^2 \omega_{\alpha xxt}(x,t) - \omega_{\alpha xx}(x,t) = \alpha^2 \cdot \upsilon_{xxt}(x,t), \tag{13}$$

$$\omega_\alpha(x,0) = 0, \omega_\alpha(0,t) = 0. \tag{14}$$

В силу теоремы 1, решение задачи (11),(12), имеет вид

$$\omega_\alpha(x,t) = \alpha^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty [G_\alpha(x-s,t-\tau) - G_\alpha(x+s,t-\tau)] \upsilon_{ss\tau}(s\tau) ds d\tau, \tag{15}$$

Покажем, что функция $\omega_\alpha(x,t)$ в $(x,t) \in Q^+_T$ равномерно сходятся к нулю при $\alpha \to 0$. Так как

$$[G_\alpha(x-s,t-\tau) - G_\alpha(x+s,t-\tau)] \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+\alpha^2\xi^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right) |cos\xi(x-\xi) + cos\xi(x+\xi)| d\xi \leq$$

$$\leq \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2\xi^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{1+\alpha^2\xi^2}(t-\tau)\right) d\xi \leq \frac{4}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2\xi^2} d\xi = \frac{2}{\alpha},$$

то из (13) имеем

$$\lim_{\alpha\to+0} |\omega_\alpha(x,t)| \leq \lim_{\alpha\to+0} \alpha^2 \int\limits_0^t \int\limits_0^\infty G(\tau) e^{\gamma|s|} |G_\alpha(x-s,t-\tau) + G_\alpha(x-s,t-\tau)| ds d\tau \leq$$

$$\lim_{\alpha\to+0}\frac{2\alpha^2}{\alpha}C_1=0, C_1=\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty G(\tau)e^{\gamma|s|}dsd\tau.$$

Следовательно, для всех $u(x,t)\in Q_T^+$ функция $u_\alpha(x,t)$ сходится равномерно к функции $\upsilon(x,t)$ при $a\to 0$. Теорема 2 доказана. □

Список литературы/References

[1] Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н., “Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах”, *Прикл. математика и механика*, **24**:5 (1960), 852– 864. [Barenblatt G. I., Zheltov Yu.P., Kochina I. N., “Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks”, PMM, 24:5 (1960), 852-864].

[2] Аметов А. М., “Решения смешанных задач для уравнения фильтрации однородной жидкости в полубесконечной трещиновато-пористой среде”, *Дифференц. уравнения*, **31**:11 (1995), 1922–1924. [Ametov A. M., “Reshenija smeshannyh zadach dlja uravnenija fil’tracii odnorodnoj zhidkosti v polubeskonechnoj treshhinovato-poristoj srede”, Differenc. uravnenija, 31:11 (1995), 1922–1924].

[3] Аблабеков Б. С., Курманбаева А. К., “Решение некоторых начальных и краевых задач для уравнения жидкости в трещиновато-пористой среде”, *Известия КГТУ им. И. Раззакова*, **22** (2011), 235–239. [Ablabekov B. S., Kurmanbaeva A. K., “Reshenie nekotoryh nachal’nyh i kraevyh zadach dlja uravnenija zhidkosti v treshhinovato-poristoj srede”, Izvestija KGTU im. I. Razzakova, 22 (2011), 235–239].

[4] Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т., “Первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром”, *Евразийское Научное Объединение*, **1**:4(50) (2019), 1-5. [Ablabekov B. S., Mukanbetova A. T., “Pervaja nachalno-kraevaja zadacha dlja odnomernogo psevdoparabolicheskogo uravnenija s malym parametrom”, Evrazijskoe Nauchnoe Obedinenie, 1:4(50) (2019), 1-5].

[5] Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т., “О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром”, *Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана*, 2018, №11, 7-11. [Ablabekov B. S., Mukanbetova A. T., “O razreshimosti reshenij vtoroj nachal’no-kraevoj zadachi dlja psevdoparabolicheskogo uravnenija s malym parametrom”, Nauka, novye tehnologii i innovacii Kyrgyzstana, 2018, №11, 7-11].

[6] Аблабеков Б. С., *Обратные задачи для псевдопараболических уравнений*, Илим, Бишкек, 2001, 183 с. [Ablabekov B. S., Inverse problems for pseudoparabolic equations, Ilim, Bishkek, 2001, 183 pp.]

[7] Hallaire M., “L’eau et la productions vegetable”, Institut National de la Recherche Agronomique, 9 (1964).

[8] Чудновский А. Ф., *Теплофизика почвы*, Наука, М., 1976, 352 с. [Chudnovsky A. F., Thermophysics of the soil, Nauka, Moscow, 1976, 352 pp.]

[9] Макаова Р. Х., “Первая краевая задача для неоднородногоуравнения Аллера”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016, №4-1(16), 45-49. [Makaova R. Kh., “Pervaya kraevaya zadacha dlya neodnorodnogo uravneniya Allera”, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki, 4-1(16) (2016), 45–49].

[10] Макаова Р. Х., “Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана-Лиувилля”, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **17**:3 (2015), 35–38. [Makaova R. Kh., “The second boundary value problem for the generalized Hallaire equation with the Riemann-Liouville fractional derivative”, Reposts of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences, 17:3 (2015), 35–38].

[11] Yangarber V. A., “The mixed problem for a modified moisture-transfer equation”, Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 8:1 (1967), 62–64.

[12] Шхануков М. Х., “О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах”, *Дифференц.*

уравнения, **18**:4 (1982), 689–699. [Shkhanukov M. Kh., "On some boundary value problems for third order equations arising in the modeling of fluid filtration in porous media", Differ. Uravn., 18:4 (1982), 689–699].

[13] Colton D, "Pseudoparabolic equations in one space variable", Differential Equations, 12:3 (1972), 559–565.

[14] Showalter R. E., Ting T. W., "Pseudoparabolic partial differential equations", SIAM J. Math. Anal., 1:1 (1970), 1–26.

[15] Зикиров О. С., Холиков Д. К., "Об одной задаче для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка", *Математические заметки СВФУ*, **23**:2 (2016), 19–30. [Zkirov O. S., Khalilov D. K., "O some problem for a loaded pseodoparabolic equation of the third order", Mathematical notes of NEFU, 23:2 (2016), 19-30].

[16] Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, ФМЛ, М., 1963, 1100 с. [Gradshtejn I. S., Ryzhik I. M., Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij, FML, M, 1963, 1100 pp.]

[17] Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. Т. 3, М., 1969, 800 с. [Fihtengol'c G. M., Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija. V. 3, M., 1969, 800 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 852–864.

[2] Аметов А. М. Решения смешанных задач для уравнения фильтрации однородной жидкости в полубесконечной трещиновато-пористой среде // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 11. С. 1922–1924.

[3] Аблабеков Б. С., Курманбаева А. К. Решение некоторых начальных и краевых задач для уравнения жидкости в трещиновато-пористой среде // Известия КГТУ им. И.Раззакова. 2011. Т. 22. С. 235–239.

[4] Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. Первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с малым параметром // Евразийское Научное Объединение. 2019. Т. 1. № 4 (50). С.1-5.

[5] Аблабеков Б. С., Муканбетова А. Т. О разрешимости решений второй начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения с малым параметром // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2018. №11. С. 7-11.

[6] Аблабеков Б. С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений. Бишкек: Илим, 2001. 183 с.

[7] Hallaire M. L'eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. 1964. vol. 9.

[8] Чудновский А. Ф. Теплофизика почвы. М.: Наука, 1976. 352 с.

[9] Макаова Р. Х. Первая краевая задача для неоднородногоуравнения Аллера // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2016 №4-1(16). С. 45-49.

[10] Макаова Р. Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана-Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2015. Т. 17. № 3. С. 35–38.

[11] Yangarber V. A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 1967. vol. 8. No. 1. P. 62–64.

[12] Шхануков М. Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 689–699.

[13] Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // Differential Equations. 1972. vol. 12. no. 3. P. 559–565.

[14] Showalter R. E., Ting T. W. Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1. No 1. P. 1–26

[15] Зикиров О. С., Холиков Д. К. Об одной задаче для нагруженного псевдопараболического уравнения третьего порядка // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23. №2. С. 19–30.

[16] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: ФМЛ. 1963. 1100 с.

[17] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. М.: 1969. 800 с.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. vol. 32. no. 3. pp. 29–41. ISSN 2079-6641

MSC 35K70 Research Article

Boundary problem on semi-direct for pseudoparabolic equation with a small parametr

B. S. Ablabekov, A. T. Mukanbetova

Kyrgyz National University named G. Balasagin, 720033, Bishkek, Frunze st. 547, Kyrgyzstan

E-mail: ablabekov_63@mail.ru, ajzat.mukanbetova.85@mail.ru

In this paper, we study the question of the unique solvability of the initial-boundary-value problem for a pseudoparabolic equation with a small parameter on the semi-axis. An explicit analytical solution to the problem is obtained.

Key words: initial-boundary value problem, pseudoparabolic equation, Fourier transform, small parameter, unique solvability.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41

Original article submitted: 24.07.2020 Revision submitted: 12.10.2020

For citation. Ablabekov B. S., Mukanbetova A. T. Boundary problem on semi-direct for pseudoparabolic equation with a small parametr. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **32**: 3, 29-41. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-32-3-29-41

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Acknowledgments. The authors are deeply grateful to the referee for a number of comments that contributed to the improvement of the article.

Funding. The study was carried out without funding.