УДК 517.95+517.956.6 Научная статья

Обратная задача для смешанного нагруженного уравнения с оператором Римана-Лиувилля в прямоугольной области

У. Ш. Убайдуллаев

Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека, Узбекистан,
100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4.

E-mail: ulugbekuz88@mail.ru

В данной работе изучается обратная задача для смешанного нагруженного уравнения с оператором Римана-Лиувилля в прямоугольной области. Установлен критерий единственности. Построено решение задачи в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Доказано, что однозначная разрешимость обратной задачи существенным образом зависит от выбора границы прямоугольной области. Построен пример, в котором обратная задача с однородными условиями имеет нетривиальное решение. Получены оценки, позволяющие обоснование сходимости рядов в классе регулярных решений данного уравнения и устойчивость решения обратной задачи от граничных данных.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, оператор Римана-Лиувилля, обратная задача, критерий единственности, существование, малые знаменатели, устойчивость.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-18-31

Поступила в редакцию: 30.05.2020 В окончательном варианте: 14.06.2020

Для цитирования. Убайдуллаев У. Ш. Обратная задача для смешанного нагруженного уравнения с оператором Римана-Лиувилля в прямоугольной области // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2020. Т. 31. № 2. С. 18-31. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-18-31

Введение

Теория дробных дифференциальных и интегральных операторов является важной частью линейного и нелинейного анализа, поскольку она естественным образом возникает во многих областях математики и математической физики, инженерии, нейро-биологии, экономики, теории управления (см. [1]-[2]). Кроме того, в области динамических систем и теории управления, которая может моделироваться дифференциальным уравнением дробного порядка, содержащим производные нецелого порядка [3]. Существуют некоторые классические методы, которые применимы для решения некоторых дифференциальных уравнений дробного порядка с участием хорошо известных операторов, таких как Римана-Лиувилля, Капуто, Эрдейи-Кобера и другие.

Финансирование. Исследование выполнялось без финансирования

Первоначальные результаты, связанные с применением операторов интегро-дифференцирования в теории дифференциальных уравнений, получены[4], где исследован одноз-начная разрешимость задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором обобщенного интегро - дифференцирования Римана-Лиувилля, а решение выражается с помощью специальных функций типа Миттаг-Леффлера. В работе [5] исследованы свойства функции Миттаг-Леффлера и решена первая краевая задача в случае, когда порядок уравнения меньше двух.

В работах [6-8] исследовали задачу Коши для диффузионно-волнового уравнения с операторами дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля и Капуто, имеющие большие значения при построении математических моделей в процессах диффузии.

В работе [9],используя свойства гармонических функций и теорию интегральных уравнений, изучены дробные аналоги задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.

В последние годы возник интерес исследованию краевых задач методом спектрального анализа для уравнений смешанного типа второго и третьего порядка в прямоугольной области [10-11]. На основании этих работ были изучены обратные задачи для уравнений смешанного типа [12-13].

Заметим, что прямые краевые задачи для смешанных уравнений с оператором дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля и Капуто, исследованы в работах [14-15], а обратные задачи для смешанных нагруженных уравнений с оператором Римана-Лиувилля не изучены.

В настоящей работе в прямоугольной области для смешанного нагруженного уравнения с оператором дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля ставится обратная задача по отысканию правых частей. Используя методы работ [12, 13] установлен критерий единственности решения обратной задачи. Решения задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. Доказано, что однозначная разрешимость обратной задачи существенным образом зависит от выбора границы прямоугольной области. Построен пример, в котором обратная задача с однородными условиями имеет нетривиальное решение. Получены оценки, позволяющие обоснование сходимости рядов в классе регулярных решений данного уравнения и устойчивость решения обратной задачи от граничных данных.

Постановка задачи

В прямоугольной области $D = \{(x,y): \quad 0 < x < l, \quad -p < y < q \}$ рассмотрим уравнение

$$Lu = f(x,y) \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - D_{0y}^{\alpha-1} u_y(x,y) - b^2 u + \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} u_y(x,0), & y \geq 0, \\ u_{xx} - u_{yy} - b^2 u, & y < 0, \end{cases} \quad f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases} \tag{2}$$

$l>0,\quad p>0,\quad q>0,\quad b\geq 0-$ заданные действительные числа, а $D_{0y}^{\alpha-1}[\cdot]-$оператор интегрирования дробного порядка $\alpha\in(0,1)$[16] и имеет вид:

$$D_{0y}^{\alpha-1}\omega(y)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha}\omega(t)dt, \tag{3}$$

здесь $\Gamma(\alpha)-$гамма функция Эйлера.

Дифференциальный оператор дробного порядка в смысле Капуто выражается формулой[8]:

$$_{c}D_{0y}^{\alpha}g(y)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha}g'(t)dt, & 0<\alpha<1,\\ \frac{d}{dy}g(y), & \alpha=1.\end{cases} \tag{4}$$

Заметим, что оператор Капуто через интеграл Римана-Лиувилля дробного порядка определяется следующим образом [16,стр.41-42]:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[D_{0y}^{\alpha-1}u_y(x,y)\right]={}_{c}D_{0y}^{\alpha}u_y(x,y)+\frac{y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}u_y(x,0). \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$J=\{(x,y):\ 0<x<1,\ y=0\},\ D_1=D\ \cap\ \{(x,y):\ x>0,\ y>0\},$$

$$D_2=D\ \cap\ \{(x,y):\ x>0,\ y<0\},\ D=D_1\cup D_2\cup J.$$

В области D исследуем следующую задачу.

Обратная задача. Найти в области Ω функции $u(x,y)$ и $f(x,y)$ удовлетворяющие условиям:

$$u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^1(D),\quad u_{xx}\in C(D_1),\quad u_y(x,y)\in L_1(D_1),\quad u\in C^2(D_2), \tag{6}$$

$$f_j(x)\in C(0,1)\cap L_2[0,1], \tag{7}$$

$$Lu=f(x,y),\qquad (x,y)\in D_1\cup D_2, \tag{8}$$

$$u(0,y)=0,\qquad u(1,y)=0,\qquad -p\leq y\leq q, \tag{9}$$

$$u(x,-p)=\psi(x),\qquad 0\leq x\leq l, \tag{10}$$

$$u_y(x,-p)=g(x),\qquad 0\leq x\leq l, \tag{11}$$

$$u(x,q)=\varphi(x),\qquad 0\leq x\leq l, \tag{12}$$

где $\psi(x),\quad g(x),\quad \varphi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\psi(0)=\psi(l)=0,\quad \varphi(0)=\varphi(l)=0, \tag{13}$$

здесь условия (11) и (12) допольнителным для определения функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Построение решения задачи

Продифференцируем уравнение (1) один раз по y. Тогда для функции $\upsilon(x,y)=u_y(x,y)$ с учетом (5) получим уравнение

$$0=\begin{cases} \upsilon_{xx}-{}_cD_{0y}^{\alpha}\upsilon(x,y)-b^2\upsilon, & y\geq 0,\\ \upsilon_{xx}-\upsilon_{yy}-b^2\upsilon, & y<0.\end{cases} \tag{14}$$

Из условий (6) следует, что

$$\upsilon(x,0+0)=\upsilon(x,0-0), \quad 0\leq x\leq l. \tag{15}$$

В силу условий (9) и (11) имеем

$$\upsilon(0,y)=u_y(0,y)=0, \quad \upsilon(1,y)=u_y(1,y)=0, \quad p\leq y\leq q, \tag{16}$$

$$\upsilon(x,-p)=u_y(x,-p)=g(x), \qquad 0\leq x\leq l. \tag{17}$$

Частные решения уравнения (14), не равные нулю в области D и удовлетворяющие нулевым граничным условиям (16), будем искать в виде

$$\upsilon(x,y)=X(x)Y(y) \tag{18}$$

Подставляя (18) в (14) и (16) получаем

$${}_cD_{0y}^{\alpha}Y(y)+(b^2+\lambda^2)Y(y)=0, \quad 0<y<q, \tag{19}$$

$$Y''(y)+(b^2+\lambda^2)Y(y)=0, \quad -p<y<0, \tag{20}$$

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \quad 0<x<l, \tag{21}$$

$$X(0)=0, \qquad X(l)=0. \tag{22}$$

Как нам известно, что спектральная задача (21) и (22) имеет решение

$$X_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}sin\,\lambda_k x, \quad \lambda_k=\frac{\pi k}{l}, \quad k\in\ N. \tag{23}$$

Тогда дифференциальные уравнения (19) и (20) имеют решения

$$Y_k(y)=c_kE_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2y^{\alpha},1\right]\ , \quad 0<y<q, \tag{24}$$

$$Y_k(y)=a_k cos\ \rho_k y+d_k sin\ \rho_k y, \qquad -p<y<0, \tag{25}$$

где $\rho_k=\sqrt{\lambda_k^2+b^2}$, a_k, d_k, c_k – произвольные постоянные, а $E_{1/\alpha}(z,\sigma)$ –известная функция Миттаг-Леффлера, которая имеет вид [5], [8]:

$$E_{1/\alpha}(z,\sigma)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{\Gamma(\alpha\ i+\sigma)}, \quad \sigma>0. \tag{26}$$

Так как решения $\upsilon_k(x,y)=X_k(x)Y_k(y)$, $k\in\ N$, должны удовлетворять условию (15) , то учитывая, $\upsilon(x,y)=u_y(x,y)$ подберем a_k, d_k и c_k таким образом, чтобы выполнялось условие

$$Y_k(0+0)=Y_k(0-0). \tag{27}$$

В силу свойства функции Миттаг-Леффлера[8, стр. 13, (1.1.12)]:

$$E_{1/\alpha}(z) = 1 + zE_{1/\alpha}(z, \alpha+1) \tag{28}$$

из (24) имеем $Y_k(0+0) = c_k$, а из (25) получим $Y_k(0-0) = a_k$. Отсюда с учетом (27) находим $a_k = c_k$. Принимая во внимание последнее равенство функции (25) перепишем в виде

$$Y_k(y) = c_k cos\ \rho_k y + d_k sin\ \rho_k y, \quad -p < y < 0, \tag{29}$$

Решение задачи (14)- (16) на основании (23), (24) и (29) будем искать в виде суммы ряда

$$\upsilon(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) Y_k(y). \tag{30}$$

Теперь находим коэффициенты c_k и d_k. Воспользуемся условием (17) с учетом (23):

$$\upsilon(x,-p) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} [c_k cos\ \rho_k p - d_k sin\ \rho_k p] \sin\lambda_k x = g(x),$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} [c_k cos\ \rho_k p - d_k sin\ \rho_k p] \sin\lambda_k x = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{k=1}^{\infty} g_k sin\,\lambda_k x, \tag{31}$$

где

$$g_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l g(x) \sin\lambda_k x dx. \tag{32}$$

Из (31) находим

$$c_k cos\ \rho_k p - d_k sin\ \rho_k p = g_k. \tag{33}$$

Из обозначения $\upsilon(x,y) = u_y(x,y)$ получим

$$\int_y^q \upsilon(x,t)dt = \int_y^q u_t(x,t)dt = u(x,t)|_{t=y}^{t=q} = u(x,q) - u(x,y), \quad y > 0,$$

$$\int_{-p}^y \upsilon(x,t)dt = \int_{-p}^y u_t(x,t)dt = u(x,t)|_{t=-p}^{t=y} = u(x,y) - u(x,-p), \quad y < 0.$$

Отсюда в силу (11) и (13) находим

$$u(x,y) = \begin{cases} \varphi(x) - \int\limits_y^q \upsilon(x,t)dt, & y > 0, \\ \psi(x) + \int\limits_{-p}^y \upsilon(x,t)dt, & y < 0. \end{cases} \tag{34}$$

В силу (24), (29) и (30) из (34) имеем

$$u(x,y) = \begin{cases} \varphi(x) - \sqrt{\frac{2}{l}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k sin\,\lambda_k x \int\limits_y^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2 t^\alpha, 1\right] d\ t, \quad y > 0, \\ \psi(x) + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} sin\lambda_k x \left[\frac{c_k}{\rho_k}(sin\ \rho_k y + sin\ \rho_k p) - \right. \\ \left. - \frac{d_k}{\rho_k}(cos\ \rho_k y - cos\ \rho_k p)\right], \quad y < 0. \end{cases} \tag{35}$$

Используя формулу [5, гл. 3, § 1, стр 118 (1.6)]:

$$\frac{d}{dz}\left[zE_{1/\alpha}\left(z^{\alpha},2\right)\right] = E_{1/\alpha}\left(z^{\alpha},1\right) \tag{36}$$

вычислим интеграл

$$W_1(y)=\int\limits_y^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2 t^{\alpha},1\right]dt=\int\limits_y^q \frac{d}{dt}\left\{tE_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2 t^{\alpha},2\right]\right\}dt=$$

$$=qE_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\, q^{\alpha},2\right]-yE_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\, y^{\alpha},2\right], \tag{37}$$

.

Подставляя (37) в (35) с учетом $u(x,0-0)=u(x,0+0)$, получим

$$\left\{q\rho_k E_{1/\alpha}\left[-\rho_k{}^2\, q^{\alpha},2\right]+sin\ \rho_k p\right\}c_k+d_k\left[cos\ \rho_k p-1\right]=\rho_k(\varphi_k-\psi_k), \tag{38}$$

где

$$\varphi_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \varphi(x)\,sin\,\lambda_k x dx, \qquad \psi_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l \psi(x)\,sin\,\lambda_k x dx. \tag{39}$$

Таким образом, получена система (33) и (38) для нахождения неизвестных коэффициентов c_k и d_k. Откуда находим

$$c_k=\frac{1}{\Delta_{pq}(k)}\left[(cos\rho_k p-1)g_k-\rho_k(\varphi_k-\psi_k)sin\ \rho_k p\right], \tag{40}$$

$$d_k=\frac{1}{\Delta_{pq}(k)}\left[\rho_k(\varphi_k-\psi_k)cos\ \rho_k p-\left\{q\rho_k E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\, q^{\alpha},2\right]+sin\ \rho_k p\right\}g_k\right], \tag{41}$$

при условии, что при всех $k\in N$

$$\Delta_{pq}(k)=\left\{q\rho_k E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\, q^{\alpha},2\right]sin\ \rho_k p+1-cos\ \rho_k p\right\}\neq 0. \tag{42}$$

Подставляя (40) и (41) в (35) имеем

$$u(x,y)=\begin{cases}\varphi(x)-\sqrt{\frac{2}{l}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{sin\,\lambda_k x}{\Delta_{pq}(k)}\int\limits_y^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\, t^{\alpha},1\right]\,d\,t\times\\ \times\left[(cos\rho_k\, p-1)\ g_k-\rho_k\,(\varphi_k-\psi_k)\,sin\ \rho_k\ p\right], \qquad 0<y<q,\\ \\ \psi(x)+\sqrt{\frac{2}{l}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{sin\,\lambda_k x}{\rho_k\,\Delta_{pq}(k)}\left\{\left[(\ cos\rho_k\ p-1)\ g_k-\rho_k(\varphi_k-\psi_k)\,sin\ \rho_k\ p\right]\times\right.\\ \times(sin\ \rho_k y+sin\ \rho_k p)-\left[\rho_k(\varphi_k-\psi_k)\,cos\ \rho_k p-\left(q\rho_k E_{1/\alpha}\left(-\rho_k^2\, q^{\alpha},2\right)+\right.\right.\\ \left.\left.\left.+sin\ \rho_k p\right)g_k\right](cos\ \rho_k y-cos\ \rho_k p)\right\}, \qquad -p<y<0.\end{cases} \tag{43}$$

В силу (23) функции $f_j(x)$ представим в виде

$$f_j(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}f_{jk}sin\,\lambda_k x, \quad (j=1,2), \tag{44_j}$$

где

$$f_{jk}=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l f_j(x)sin\,\lambda_k x dx.\ . \tag{45_j}$$

Теперь, поставляя (43) в уравнение (8) с учетом (5) найдем

$$f_{1k}(x) = -\rho_k^2 \varphi_k(x), \quad y > 0, \tag{46_1}$$

$$f_{2k}(x) = -\rho_k^2 \psi_k - \frac{\rho_k}{\Delta_{pq}(k)} \{ \, [(cos\rho_k p - 1) g_k - \rho_k (\varphi_k - \psi_k) sin\ \rho_k p] \, sin\ p\rho_k +$$

$$+ \left[\rho_k (\varphi_k - \psi_k) cos\ \rho_k p - \left\{ q\rho_k E_{1/\alpha} \left[-\rho_k^2\ q^\alpha, 2\right] + sin\ \rho_k p \right\} g_k\right] cos\ \rho_k p \right\}. \tag{46_2}$$

Единственность решения задачи

Теорема 1. Если существует решение обратной задачи (6) - (12), то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия (42) при всех $k \in N$.

Доказательство. Пусть пара функций $u(x,y)$ и $f(x,y)$−решения обратной задачи (6)-(12) при $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$. Известно , что функции (23) образует полную ортонормированную систему в $L_2[0,l]$. Следуя [17] рассмотрим интеграл

$$u_k(y) = \int_0^l u(x,y) X_k(x)\, dx, \quad -p \le y \le q. \tag{47}$$

Из равенства (47) при $y > 0$ с учетом (1) и (2), имеем

$$D_{0y}^{\alpha-1} u_y(x,y) - \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} u_y(x,0) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \left[D_{0y}^{\alpha-1} u_y(x,y) - \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} u_y(x,0) \right] \sin\lambda_k x dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \left[u_{xx}(x,y) - b^2 u(x,y) - f_1(x) \right] \sin\lambda_k x dx, \quad 0 < y < q.$$

Отсюда интегрируя по частям два раза первой выражение правой части с учетом (6), (9) ,(45_1) и (47) получаем

$$D_{0y}^{\alpha-1} u'_k(y) - \frac{y^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} u'_k(0) + (b^2 + {\lambda_k}^2) u_k(y) = -f_{1k}, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{l}, \quad k \in N, \tag{48}$$

где f_{1k}− определяется из (45_1).

Дифференцируя (48) по y с учетом (5), имеем

$${}_cD_{0y}^{\alpha} \Theta_k(y) + {\rho_k}^2 \Theta_k(y) = 0, \quad \Theta_k(y) = u'_k(y), \quad 0 < y < q. \tag{49}$$

Дифференцируя равенства (47) два раза по y при $y < 0$ с учетом уравнения (1) и (2), а затем, интегрируя по частям два раза, находим

$$u''_k(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u_{yy}(x,y) \sin\lambda_k x dx = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \left[u_{xx} - b^2 u - f_2(x) \right] \sin\lambda_k x dx =$$

$$= -((\pi k)^2 + b^2) \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l u(x,y) \sin\lambda_k x dx - \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l f_2(x) \sin\lambda_k x dx.$$

Отсюда, учитывая (9), (23), (45_2) и (47), получаем

$$u''_k(y)+\rho_k{}^2 u_k(y)=-f_{2k},\quad -p<y<0, \tag{50}$$

здесь где $f_{2k}-$ определяется из (45_2).

В силу однородности условий (10)-(12) из (47) имеем

$$u_k(-p)=0,\quad u'_k(-p)=0,\quad u_k(q)=0. \tag{51}$$

Дифференциальные уравнения (49) и (50) соответственно имеет общие решения

$$u_k(y)=\begin{cases} -\omega_k\int\limits_y^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2 t^\alpha,1\right]\,dt-\frac{f_{1k}}{\rho_k^2}, & 0<y<q,\\ \delta_k cos\ \rho_k y+\gamma_k sin\ \rho_k y-\frac{f_{2k}}{\rho_k^2}, & -p<y<0,\end{cases} \tag{52}$$

где $\delta_k,\ \ \gamma_k,\ \ \omega_k$ −произвольные постоянные, а $E_{1/\alpha}(z,\sigma)$ −определяется рядом (26).

Теперь в (52) на основании (6) подберем $\delta_k,\ \ \gamma_k$ через ω_k так, чтобы выполняются условия сопряжения:

$$u_k(+0)=u_k(-0),\quad u'_k(+0)=u'_k(-0). \tag{53}$$

Условия (53) выполняются только тогда, когда

$$\delta_k=\frac{f_{2k}-f_{1k}}{\rho_k^2}-\omega_k\int\limits_0^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\ t^\alpha,1\right]\,dt,\quad \gamma_k=\frac{\omega_k}{\rho_k},\quad k=1,2,....$$

Подставляя найденные значения δ_n и γ_n в (52), получим

$$u_k(y)=\left[\frac{f_{2k}-f_{1k}}{\rho_k^2}-\omega_k\int\limits_0^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2 t^\alpha,1\right]\,dt\right]cos\ \rho_k y+$$

$$+\frac{\omega_k}{\rho_k}sin\ \rho_k y-\frac{f_{2k}}{\rho_k^2},\quad -p<y<0. \tag{54}$$

На основании формулы (52) в силу третьего граничного условия (51) из (45_2) получим

$$f_{1k}=0. \tag{55}$$

Принимая во внимание первое и второе условия (51) с учетом (55) из (54) получим систему

$$\begin{cases} \frac{f_{2k}}{\rho_k^2}\left[cos\ \rho_k p-1\right]-\omega_k\left\{cos\ \rho_k p\int\limits_0^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2 t^\alpha,1\right]\,dt+\frac{1}{\rho_k}sin\ \rho_k p\right\}=0,\\ \frac{f_{2k}}{\rho_k}sin\ \ \rho_k p-\omega_k\rho_k\left\{sin\ \rho_k p\int\limits_0^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2 t^\alpha,1\right]\,dt-\frac{1}{\rho_k}cos\ \rho_k p\right\}=0.\end{cases} \tag{56}$$

Определитель системы (56) равен $\frac{\Delta_{pq}(k)}{\rho_k^2}$ и в силу условия (42) отличен от нуля, поэтому она имеет только нулевое решение

$$\omega_k=0,\quad f_{2k}=0,\quad k\in N. \tag{57}$$

В силу (55) и (57) из (47), (45_j) с учетом (52) и (54) имеем

$$u_k(y) = \int_0^1 u(x,y) X_k(x)\,dx = 0, \quad -p \le y \le q,$$

$$\int_0^1 f_j(x) X_k(x)\,dx = 0,\ (j = 1,2).$$

Отсюда, в силу полноты функции $X_n(x)$ в пространстве $L_2(0,l)$ следует, что $u(x,y) \equiv 0$, $\quad f_1(x) \equiv 0$, $\quad f_2(x) \equiv 0$ почти для всех $x \in [0,l]$ и при любом $y \in [-p,q]$. Поскольку $u(x,y) \in C(\bar{D})$, то $u(x,y) \equiv 0$ в $\bar{D}$ и $f_1(x) \equiv 0$, $\quad f_2(x) \equiv 0$ в $x \in [0,l]$.

Следовательно, решение задачи (6)-(12) единственно при выполнении условия (42).

Пусть $k = r \in N$ и при некоторых p, q, α нарушено условие (42), т.е. $\Delta_{pq}(r) = 0$. Тогда выражение $\Delta_{pq}(r)$ представим в виде

$$\Delta_{pq}(r) = 2\sqrt{1 + (q\rho_r)^2 E^2_{1/\alpha}\left[-\rho_r^2 q^\alpha, 2\right]}\, sin\left(\frac{\rho_r p}{2} + \nu_r\right) sin\frac{\rho_r p}{2}, \tag{58}$$

где

$$\nu_r = arcsin\frac{q\rho_r E_{1/\alpha}\left[-\rho_r^2\ q^\alpha, 2\right]}{\sqrt{1 + (q\rho_r)^2 E^2_{1/\alpha}\left[-\rho_r^2 q^\alpha, 2\right]}}, \quad r \in N, \quad \rho_r = \sqrt{\lambda_r^2 + b^2},$$

$$\nu_r \to \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Из представления (58) видно, что выражение $\Delta_{pq}(r) = 0$ только в том случае, когда

$$p = \frac{2\pi n}{\rho_r}, \quad n \in N \quad \text{или} \quad p = \frac{2\pi m}{\rho_r} - \frac{2\nu_r}{\rho_r}, \quad m,\ r \in N. \tag{59}$$

Отсюда следует, что система (56) имеет ненулевое решение. Тогда обратная задача A_λ при $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $\quad g(x) \equiv 0)$ и $sin\ \rho_r p \ne 0$ имеет нетривиальное решение

$$u_r(x,y) = \begin{cases} \left\{-\frac{f_{1r}}{\rho_r^2} + \omega_r \int_y^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_r^2 t^\alpha, 1\right] dt\right\} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\lambda_r x, & 0 < y < q, \\ \left\{\frac{f_{2r}}{\rho_r^2}(cos\ \rho_r y - 1) - \omega_r q E_{1/\alpha}\left[-\rho_r^2\, q^\alpha, 2\right] cos\ \rho_r y + \right. \\ \left. + \frac{\omega_r}{\rho_r} sin\ \rho_r y\right\} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\lambda_r x, \quad -p < y < 0, \end{cases} \tag{60}$$

$$f_{jr}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} f_{jr} \sin\lambda_r x, \quad (j = 1,2), \quad f_{1r} = 0,$$

$$f_{2r}\, sin\ \rho_r p = \omega_r\rho_r\left[\rho_r sin\ \rho_r p \int_0^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_r^2 t^\alpha, 1\right]\, dt - cos\rho_r p\right] = -\omega_r\rho_r, \tag{61}$$

где ω_r- произвольная постоянная, не равная нулю.

Легко установить, что построенные функции (60) и (61) удовлетворяют условиям (6) - (9) и

$$u_r(x,-p) = 0, \quad u_{ry}(x,-p) = 0, \quad u_r(x,q) = 0, \quad 0 \le x \le 1. \tag{62}$$

Если $sin\ \rho_r p = 0$, то

$$u_r(x,y) = \begin{cases} 0\ , & 0 < y < q, \\ \frac{f_{2r}}{\rho_r^2}(cos\ \rho_r y - 1)\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_r x\ , & -p < y < 0, \end{cases} \tag{63}$$

$$f_{1r} = 0, \quad f_{2r}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} f_{2r}\sin\lambda_r x, \tag{64}$$

где $f_{2r} \neq 0-$ произвольная постоянная.

Отметим, что функции (63) и (64) являются решением задачи (6)-(12) при однородных граничных условиях, когда $sin\ \rho_r p = 0$. □

Обоснование существования решения обратной задачи

Для обоснования существования решения обратной задачи (6)-(12) доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. Если $p = 2p_1, \quad p_1 = a/b, \quad a,\ b \in N, \quad (a,b) = 1$ и $b > 0$, то существуют положительные постоянные C_0 и $n_0 \in N$, такие, что при всех $n > n_0$ справедлива оценка

$$\left|\Delta_{pq}(n)\right| \geqslant \frac{C_0}{n}.$$

Теорема 3. Пусть p_1- положительное иррациональное число с неограниченными элементами, $b = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечное множество натуральных чисел n, таких что

$$\left|\Delta_{pq}(n)\right| \leqslant \frac{\varepsilon C_1}{n},$$

где C_1- положительное число, зависящее от p_1.

Теорема 4. Если $\varphi(x),\ \ \psi(x) \in C^5[0,l],\ \ g(x) \in C^4[0,l]$ и $g^{(i)}(0) = g^{(i)}(l), \quad \varphi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l) = \ \psi^{(i)}(l) = 0,\ i = 0,2,4$ и выполнены условия теоремы 2, то обратная задача (6)-(12) однозначно разрешима и это решение определяется рядами

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)u_n(y), \quad f_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)f_{jn}, \tag{65}$$

где $f_{jn}\ (j = 1,2)$ и $u_n(y)-$ соответственно определяется формулой (46_j) и

$$u_n(y) = \begin{cases} \varphi_n - \frac{1}{\Delta_{pq}(k)}\int\limits_y^q E_{1/\alpha}\left[-\rho_k^2\, t^{\alpha}, 1\right]\, d\, t \times \\ \times\left[(cos\rho_k\, p - 1)\, g_k - \rho_k\,(\varphi_k - \psi_k)\, sin\ \rho_k\ p\right], \qquad 0 < y < q, \\ \\ \psi_n + \frac{1}{\rho_k\,\Delta_{pq}(k)}\left\{\left[(\ cos\rho_k\ p - 1)\ g_k - \rho_k(\varphi_k - \psi_k)\, sin\ \rho_k\ p\right]\times \right. \\ \times(sin\ \rho_k\, y + sin\ \rho_k\, p) - \left[\rho_k(\varphi_k - \psi_k)\, cos\ \rho_k\, p - \left(q\,\rho_k E_{1/\alpha}\left(-\rho_k^2\ q^{\alpha}, 2\right) + \right.\right. \\ \left.\left.\left. + sin\ \rho_k\, p\right) g_k\right](cos\ \rho_k\, y - cos\ \rho_k\, p)\right\}, \quad -p < y < 0. \end{cases}$$

Теорема 5.(устойчивость). Пусть выполнены условия теоремы 1, 4 и $\Delta_{pq}(n) \neq 0$, $n = 1,2,...,n_0$. Тогда для решения (65) обратной задачи (6)-(12) справедливы оценки

$$\|u(x,y)\|_{C(\bar{D}_1)} \leqslant$$

$$\leqslant M_1\left(\|\varphi(x)\|_{C[0,l]}+\|\psi(x)\|_{C[0,l]}+\left\|\varphi''(x)\right\|_{C[0,l]}+\left\|\psi''(x)\right\|_{C[0,l]}+\left\|g'(x)\right\|_{C[0,l]}\right),$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\bar{D}_2)}\leqslant$$

$$\leqslant M_2\left(\|\varphi(x)\|_{C[0,l]}+\|\psi(x)\|_{C[0,l]}+\left\|\varphi'(x)\right\|_{C[0,l]}+\left\|\psi'(x)\right\|_{C[0,1]}+\|g(x)\|_{C[0,l]}\right),$$

$$\|f_1(x)\|_{C[0,l]}\leqslant M_3\left(\left\|\varphi''(x)\right\|_{C[0,l]}+\|\varphi(x)\|_{C[0,l]}\right),$$

$$\|f_2(x)\|_{C[0,l]}\leqslant M_4\left(\left\|\varphi'''(x)\right\|_{C[0,l]}+\left\|\psi'''(x)\right\|_{C[0,l]}+\left\|\varphi''(x)\right\|_{C[0,l]}+\left\|\psi''(x)\right\|_{C[0,l]}+\right.$$

$$\left.+\left\|\varphi'(x)\right\|_{C[0,l]}+\left\|\psi'(x)\right\|_{C[0,l]}+\left\|g'(x)\right\|_{C[0,l]}+\|\varphi(x)\|_{C[0,l]}+\|\psi(x)\|_{C[0,l]}+\|g(x)\|_{C[0,l]}\right),$$

где $M_i\ (i=\overline{1,4})-$ положительные постоянные.

Для доказательство теоремы 2-5 используется методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных, математического и спектрального анализа.

Конкурирующие интересы. Авторы заявляют, что конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Все авторы участвовали в написании статьи. Авторы несут полную ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать. Окончательная версия рукописи была одобрена всеми авторами.

Список литературы/References

[1] Lundstrom B. N., Higgs M. H., Spain W. J. Fairhall A. L., “Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons”, *Nature Neuroscience*, **11** (2018), 1335–1342.

[2] Scalas E., “The application of continuos-time random walks in finance and economics”, *Physica*, **362**:2 (2006), 225–239.

[3] Monje, *Conception A. Fundamentals and Applications*, Springer, 2010.

[4] Джарбашян М. М., Нерсесян А. Б., “Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка”, *Изв.АН Арм ССР. Математика*, **1**:3 (1968), 3–28. [Dzharbashyan M. M., Nersesyan A. B., “Drobnyye proizvodnyye i zadachi Koshi dlya differentsial’nykh uravneniy drobnogo poryadka”, *Izv.AN Arm SSR. Matematika*, **1**:3 (1968), 3–28].

[5] Джарбашян М. М., *Интегральные преобразования и преставления функций в комплексной области*, М., 1966. [Dzharbashyan M. M., *Integral’nyye preobrazovaniya i prestavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti*, M., 1966].

[6] Gorenflo R., Luchko Y.F., Umarov S. R., “On the Cauchy and multipoint problems for partial pseudo-differential equations of fractional order”, *Fract. Calc. and Appl. Anal.*, 2000, № 3, 249–275.

[7] Kilbas A. A., Marzan S. A., “Cauchy problem for differential equation with Caputo derivative”, *Fract. Cale. Appl. Anal.*, **3**:7 (2004), 297–321.

[8] Псху А. В., *Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка*, Нальчик, 2005. [Pskhu A. V., *Krayevyye zadachi dlya differentsial’nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi drobnogo i kontinual’nogo poryadka*, Nal’chik, 2005].

[9] Turmetov B., Nazarova K., “On Fractional Analogs of Dirichlet and Neumann Problems for the Laplace Equation”, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 2019 https://doi.org/10.1007/s00009-019-1347-5.

[10] Сабитов К. Б., “Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области”, *Доклады РАН*, **413**:1 (2007), 23-26.

[11] Сабитов К. Б., “Краевая задача для уравнений смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области”, *Дифференциальные уравнения*, **47**:5 (2011), 705–713. [Sabitov K. B., “Krayevaya zadacha dlya uravneniy smeshannogo tipa tret'yego poryadka v pryamougol'noy oblasti”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **47**:5 (2011), 705–713].

[12] Сабитов К. Б., Сафин Э. М., “Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа”, *Матем. заметки*, **87**:6 (2010), 907–918 https://doi.org/10.4213/mzm6577. [Sabitov K. B., Safin E. M., “Obratnaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo tipa”, *Matem. zametki*, **87**:6 (2010), 907–918 https://doi.org/10.4213/mzm6577].

[13] Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В., “Обратная задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе, связанная с поиском элементов правой части”, *Изв. вузов. Матем*, 2017, № 2, 44–57 https://doi.org/10.1134/S0037446612020310. [Sabitov K.B., Martem'yanova, N.V., “The inverse problem for the Lavrent'ev–Bitsadze equation connected with the search of elements in the right-hand side”, *Russ Math.*, **61** (2017), 36–48 https://doi.org/10.3103/S1066369X17020050].

[14] Karimov E.T., Akhatov J. S., “A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative”, *Electronic Journal of Differential Equations*, **14** (2014), 1–6.

[15] Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш., “Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области”, *Научный вестник. Математика*, 2017, № 5, 25–30. [Islomov B. I., Ubaydullayev U. SH., “Krayevaya zadacha dlya uravneniya parabolo - giperbolicheskogo tipa s operatorom drobnogo poryadka v smysle Kaputo v pryamougol'noy oblasti”, *Nauchnyy vestnik. Matematika*, 2017, № 5, 25–30].

[16] Самко С. Г., Кильбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и Техника, Минск, 1987. [Samko S. G., Kil'bas A. A., Marichev O. I., *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya*, Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987].

[17] Моисеев Е. И., “О решении спектральным методом одной нелокальной задачи”, *Дифференциальные уравнения*, **35**:8 (1999), 1094–1100. [Moiseyev Ye. I., “O reshenii spektral'nym metodom odnoy nelokal'noy zadachi”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **35**:8 (1999), 1094–1100].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Lundstrom B.N., Higgs M.H., Spain W.J. Fairhall A.L. Fractional differentiation by neocortical pyramidal neurons // Nature Neuroscience. 2018. vol. 11. pp. 1335–1342.

[2] Scalas E. The application of continuos-time random walks in finance and economics // Physica. 2006. vol. 362. no. 2. pp. 225–239.

[3] Monje, Conception A. Fundamentals and Applications Springer. 2010. ISBN: 978–1849–963–350.

[4] Джарбашян М.М.,Нерсесян А.Б. Дробные производные и задачи Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка // Изв.АН Арм ССР. Математика. 1968. Т. 1. №3. С.3–28.

[5] Джарбашян М.М. Интегральные преобразования и преставления функций в комплексной области. М.: 1966.

[6] Gorenflo R., Luchko Y.F., Umarov S.R. On the Cauchy and multipoint problems for partial pseudo-differential equations of fractional order // Fract. Calc. and Appl. Anal. 2000. no. 3. pp. 249–275.

[7] Kilbas A.A., Marzan S.A. Cauchy problem for differential equation with Caputo derivative // Fract. Cale. Appl. Anal. 2004. vol. 3. no. 7. pp. 297–321.

[8] Псху А. В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик, 2005.

[9] Turmetov B., Nazarova K. On Fractional Analogs of Dirichlet and Neumann Problems for the Laplace Equation // Mediterranean Journal of Mathematics. 2019. https://doi.org/10.1007/s00009-019-1347-5

[10] Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области // Доклады РАН. 2007. Т. 413. №1. С. 23-26.

[11] Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнений смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 5. С. 705–713.

[12] Сабитов К. Б., Сафин Э. М. Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Матем. заметки. 2010. Т. 87. № 6. С. 907–918. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm6577.

[13] Сабитов К. Б., Мартемьянова Н. В. Обратная задача для уравнения Лаврентьева–Бицадзе, связанная с поиском элементов правой части // Изв. вузов. Матем. 2017. №. 2. С. 44–57. https://doi.org/10.1134/S0037446612020310.

[14] Karimov E.Ṫ., Akhatov J. S. A boundary problem with integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation involving the Caputo fractional derivative // Electronic Journal of Differential Equations. 2014. vol. 14. pp. 1–6.

[15] Исломов Б. И., Убайдуллаев У. Ш. Краевая задача для уравнения параболо - гиперболического типа с оператором дробного порядка в смысле Капуто в прямоугольной области // Научный вестник. Математика. 2017. №5. С. 25–30.

[16] Самко С. Г., Кильбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и Техника, 1987.

[17] Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной нелокальной задачи // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. №8. С. 1094–1100.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. vol. 31. no. 2. pp. 18–31. ISSN 2079-6641

MSC 35M10, 35M20 Research Article

The inverse problem for a mixed loaded equation with the Riemann-Liouville operator in a rectangular domain.

U.Sh. Ubaydullayev

National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, University Street, 4. Tashkent, Uzbekistan

E-mail: ulugbekuz88@mail.ru

In this paper, we study the inverse problem for a mixed loaded equation with the Riemann-Liouville and Caputo operator in a rectangular domain. A criterion for the uniqueness and existence of a solution to the inverse problem is established. The solution of the problem is constructed in the form of the sum of a series of eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problem. It is proved that the unique solvability of the inverse problem substantially depends on the choice of the boundary of a rectangular region. An example is constructed in which the inverse problem with homogeneous conditions has a nontrivial solution. Estimates are obtained that allow substantiating the convergence of series in the class of regular solutions of this equation and the stability of the solution of the inverse problem from boundary data.

Key words: loaded equation, Riemann-Liouville operator, inverse problem, uniqueness criterion and existence, small denominators, sustainability.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-18-31

Original article submitted: 30.05.2020 Revision submitted: 14.06.2020

For citation. Ubaydullayev U. Sh. The inverse problem for a mixed loaded equation with the Riemann-Liouville operator in a rectangular domain.. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2020, **31**: 2, 18-31. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-31-2-18-31

Competing interests. The authors declare that there are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

Funding. This research received no specific grant from any funding agency in the public, commercial, or not-for-profit sectors