Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 30. № 1. С. 20-30. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-20-30

УДК 517.956.4

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

О. С. Зикиров, М. М. Сагдуллаева

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека,
ул. Университетская 4, 100174, г. Ташкент. Республика Узбекистан

E-mail: zikirov@yandex.ru,sagdullayevam@mail.ru

В работе доказаны теоремы существования и единственности регулярных решений одной нелокальной задаче с интегральным условием для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части. Доказательство основано на сведение поставленной задачи к смешанной задаче для нагруженного уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: краевая задачи, нелокальное условие, нелокальная задача, параболическое уравнение, функция Грина, интегральные уравнения.

Введение

Нелокальные задачи с интегральными условиями возникают при исследовании физических явлений в случае, когда граница области протекания недоступна для непостредственных измерений. Например, математическое моделирование процессы влагопереноса в капилярно–пористых средах [1], распространения тепла в гетерогенных средах [2], влагопереноса в почво–грунтах [3] и исследование одномерной диффузионной модели [4] приводят к таким задачам.

К первым работам для параболических уравнений с интегральными условиями относятся, по–видимому работы [5] и [6]. Различные классы краевые задачи с интегральными условиями для уравнений теплопроводности рассмотрены в работах [7]–[13] и др.

В настоящей работе рассматривается задача с интегшральным условием для уравнений в частных производных третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части.

Постановка задачи и основные результаты

В области $D = \{(x,t): \ 0 < x < l, \ 0 < t < T\}$ рассмотрим уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + c(x,t)u = f(x,t), \tag{1}$$

где $c(x,t)$, $f(x,t)$ — заданные функции.

Заметим, что уравнение (1) относится к первому каноническому виду относительно старших производных, указанных в работе [12], т. е. уравнение характеристики имеет один общий интеграл, причём трехкратный. Этот фактор существенно влияет как на корректность постановки задач, так и на их разрешимость.

В работе для уравнения (1) исследуется следующая задача: *найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному*

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

граничным

$$u(0,t) = \psi_1(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{3}$$

$$u_x(0,t) = \psi_2(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

и интегральному условию

$$\int\limits_0^l u(x,t)dx = \int\limits_0^t h(t,\tau)u(l,\tau)d\tau + \psi_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi_i(t)$, $(i = \overline{1,3})$, $h(t,\tau)$ – заданные, непрерывные при $x \in [0,l]$, $t \in [0,T]$, $\tau \in [0,t]$ соответственно функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0) = \psi_1(0), \quad \varphi'(l) = \psi_2(0); \quad \int\limits_0^l \varphi(x)dx = \psi_3(0).$$

В поставленной задаче в краевых условиях содержится нелокальность по времени, впервые рассмотренные в работе [13]. Заметим, что в работе [14] исследованы разрешимость краевых задач, сочетающих задачи с нелокальными условиями А.А.Самарского и задачи с интегральными условиями.

Через $C^{k,l}(D)$ обозначен класс функций $u(x,y)$, непрерывных вместе со своими частными производными порядка $\partial^{m+n}u(x,y)/\partial x^m \partial y^n$ для всех $m = \overline{0,k}$, $n = \overline{0,l}$; $C^{0,0}(D)$ обозначим через $C(D)$.

Под классом $C^{(k,\nu)}(D)$ понимаются определенные в области D функции, у которых все частные производные порядка k существуют и удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\nu \in (0,1)$.

Определение. *Регулярным в области D решением уравнения (1) называется функция $u(x,t)$, из класса $C^{3,1}(D) \cap C^{2,0}(\overline{D})$, удовлетворяющая ему в обычном смысле.*

Условие 1. *Коэффициент и правая часть уравнения (1) удовлетворяют условиям*

$$c(x,t), \quad f(x,t) \in C(\overline{D}).$$

Условие 2. *Заданные функции* $\varphi(x)$, $\psi_i(t)$, $(i=1,2,3)$ *и* $\rho(t,\tau)$ *удовлетворяют условиям*

$$\varphi(x) \in C^2[0,l]; \quad \psi_1(t), \quad \psi_3(t) \in C^1[0,T], \quad \psi_2(t) \in C[0,T].$$

Имеет место следующая теорема о разрешимости нелокальной задачи (1)–(5).

Теорема. *Пусть выполнены Условие 1 и Условие 2. Тогда существует единственное непрерывное и ограниченное решение нелокальной задачи (1)–(5).*

Сведение задачи (1)–(5) к смешанной задаче для нагруженного уравнения теплопроводности

Сначала рассмотрим задачу (1)–(5) в случае когла $c(x,t)=0$.

Пусть $u(x,t)$ является решением задачи (1)–(5). Интегрируя уравнения (1) по x от 0 до x, и учитывая условия (3), получим нагруженное уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1(x,t) - \frac{\partial^2 u(0,t)}{\partial x^2}, \tag{6}$$

здесь

$$f_1(x,t) = \psi_1'(t) + \int\limits_0^x f(z,t)dz.$$

Легко убедиться, что решение уравнения (5) также является решением уравнения (1) при $c(x,t)=0$. Сложность этой задачи состоит в том, что в обе части граничного условия (5) входит неизвестное решение $u(x,t)$.

Поэтому обозначим $u(l,t)$ через $\mu(t)$ и решим следующую задачу *найти в области D решение $u(x,t)$ уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию (2) и краевым условиям*

$$u_x(0,t) = \psi_2(t), \qquad u(l,t) = \mu(t), \qquad 0 \le t \le T. \tag{7}$$

Предположим, что $\mu(t)$ непрерывно–дифференцируема и интегрируема на $[0,T]$ функция, причем $\mu(0) = \varphi'(l)$.

Известно (см. например [15], [16]), что функция Грина смешанной задачи (2), (7) для уравнения теплопроводности имеет вид

$$G(x,t;\xi,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \Big[U(x-\xi+2nl, t-\tau) - U(x+\xi+2nl, t-\tau) \Big], \tag{8}$$

здесь

$$U(x-\xi;t-\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau}} \exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)} \right], & t > \tau, \\ \qquad\qquad 0, & t \le \tau. \end{cases}$$

Используя свойства функции Грина $G(x,t;\xi,\tau)$ получим явное решение $u(x,t)$ смешанной задачи в виде [17]

$$u(x,t)=\int\limits_0^l\varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi+\int\limits_0^t\mu(\tau)G_\xi(x,t;0,\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\psi_2(\tau)G(x,t;0,\tau)d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,t;\xi,\tau)[f_1(\xi,\tau)-u_{xx}(0,\tau)]d\xi d\tau. \qquad (9)$$

В равенство (9) входят неизвестные функции $\mu(t)$ и $u_{xx}(0,t)$. Сначала находим функцию $u_{xx}(0,t)$. С этой целью формулу (9) перепишем в виде

$$u(x,t)=-\int\limits_0^t K(x;t,\tau)u_{xx}(0,\tau)d\tau+g(x,t), \qquad (10)$$

где

$$K(x;t,\tau)=\int\limits_0^l G(x,t;\xi,\tau)d\xi; \qquad (11)$$

$$g(x,t)=\int\limits_0^l\varphi(\xi)G(x,t;\xi,0)d\xi+\int\limits_0^t\mu(\tau)G_\xi(x,t;0,\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t\psi_2(\tau)G(x,t;0,\tau)d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,t;\xi,\tau)f_1(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (12)$$

В дальнейшем исползуемся дифференциальные свойства ядра $K(x;t,\tau)$ и свободного члена $g(x,t)$ в окрестности точки $x=0$.

Исследования функции $K(x;t,\tau)$ и $g(x,t)$

Полученное интегро–дифференциальное уравнение (10) будем решать методом сведения к интегральному уравнению относительно $u_{xx}(0,t)$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *При $t>\tau$ ядро $K(x,t,\tau)$ определяемой равенством (11) имеет вторые производные по x и они ограничено при $x=0$, т. е.*

$$\left|\frac{\partial^2K(x,t,\tau)}{\partial x^2}\right|_{x=0}<M.$$

Доказательство. Лемма 1 доказывается с помощью известных оценок функции Грина и ее производных [17]

$$\left|\frac{\partial^{i+j}G(x,t;\xi,\tau)}{\partial x^i t^j}\right|<\frac{C}{(t-\tau)^{(i+2j+1)/2}}\exp\left\{-c_0\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right\},\ i,j=0,1,2,\ldots.$$

$C=const>0,\ 0<c_0=const<1$, а также неравенств

$$X^\gamma e^{-X}<Me^{-qX} \qquad (13)$$

где $X \geq 0, \gamma = const \geq 0, M = const > 0, 0 < q = const < 1$.

Дифференцируя (11) под знаком интеграла имеем

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \int_0^l \frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial x} d\xi = -\int_0^l \frac{\partial G(x,t;\xi,\tau)}{\partial \xi} d\xi = -G(x,t;l,\tau).$$

В силу равенства (8) получим

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n U(x+(2n+1)l, t-\tau).$$

Отсюда дифференцируя по x, находим

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} = 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{x+(2n+1)l}{2(t-\tau)} U(x+(2n+1)l, t-\tau).$$

Теперь полагая $x = 0$, имеем

$$\left.\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t-\tau)^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n [(2n+1)l] \exp\left\{-\frac{[(2n+1)l]^2}{4(t-\tau)}\right\}. \qquad (14)$$

Общий член ряда (14) представим в виде

$$\frac{(2n+1)l}{4\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{[(2n+1)l]^2}{4(t-\tau)}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{(2n+1)l}{2\sqrt{t-\tau}}\right]^3 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(2n+1)l}{2\sqrt{t-\tau}}\right]^2\right\} \frac{1}{[(2n+1)l]^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(2n+1)l}{2\sqrt{t-\tau}}\right]^2\right\}.$$

Используя известное неравенство (13)

$$0 < \left[\frac{(2n+1)l}{2\sqrt{t-\tau}}\right]^3 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(2n+1)l}{2\sqrt{t-\tau}}\right]^2\right\} < M,$$

получим оценку для общего члена ряда (14)

$$\left|\left.\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}\right|_{x=0}\right| \leq \left|\frac{(2n+1)l}{2(t-\tau)} U((2n+1)l, t-\tau)\right| \leq \frac{2M}{\sqrt{\pi}[(2n+1)l]^2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{[(2n+1)l]^2}{2\sqrt{t-\tau}}\right]^2\right\}.$$

Так как $(2n+1) \neq 0$ при любом $n \in N$, то нетрудно убедиться, что знака чередующий ряд (14) сходится абсолютно и равномерно, т. е.

$$\left|\left.\frac{\partial^2 K(x,t,\tau)}{\partial x^2}\right|_{x=0}\right| \leq M.$$

□

Лемма 1 доказана.

Теперь рассмотрим функцию $g(x,t)$, определяемую равенством (12), которая состоит из суммы тепловых потенциалов. Из теории тепловых потенциалов известно, что если $\varphi(x) \in C(0,l)$, $\mu(t) \in C(0,\infty)$, $\psi_2(t) \in C^1(0,\infty)$, $\psi_2(0) = 0$, то

$$g(x,t) \in C_x^2(D) \qquad \text{и} \qquad \left|\left.\frac{\partial^2 g(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0}\right| \leq M_0. \qquad (15)$$

Таким образом, функции $K(x;t,\tau)$, $g(x,t)$ и производные второго порядка по x, при $x = 0$ являются непрерывными и ограниченными функциями.

Нахождение нагруженного слагаемого $u_{xx}(0,t)$ уравнения (6)

Из доказанной леммы 1 и неравенства (15) следует, что равенство (10), можем дифференцировать по x два раза и затем полагая $x=0$, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $u_{xx}(0,t)$:

$$u_{xx}(0,t)+\int_0^t \frac{\partial^2 K(0;t,\tau)}{\partial x^2} u_{xx}(0,\tau)\,d\tau=\frac{\partial^2 g(0,t)}{\partial x^2}, \tag{16}$$

Ядро и правая часть интегрального уравнения (16) непрерывные и ограниченные функции. Решение уравнения (16) имеет вид

$$u_{xx}(0,t)=g_0(t)+\int_0^t R(t,\tau)g_0(\tau)\,d\tau \tag{17}$$

где $R(t,\tau)$ – резольвента ядра $\dfrac{\partial^2 K(0;t,\tau)}{\partial x^2}$, а $g_0(t)=\dfrac{\partial^2 g(0,t)}{\partial x^2}$.

Подставляя значение $u_{xx}(0,t)$ из (17) в формулу (10), получим

$$u(x,t)=\int_0^t G_\xi(x,t;l,\tau)\mu(\tau)\,d\tau-\int_0^t k(x,t,\tau)\,\mu(\tau)d\tau+g_2(x,t) \tag{18}$$

здесь

$$k(x,t,\tau)=\int_\tau^t K(x,t,s)\left\{G_\xi(0,\tau;l,s)+\int_s^\tau R(\tau,s)G_\xi(0,z;l,s)dz\right\}ds;$$

$g_2(x,t)$ – известная функция.

Разрешимость нелокальной задачи (1)–(5)

Интегрируя (18) по x от 0 до l будем иметь

$$\int_0^l u(x,t)dx=\int_0^t\left(\int_0^l G_\xi(x,t;l,\tau)dx\right)\mu(\tau)\,d\tau-\int_0^t\left(\int_0^l k(x,t,\tau)dx\right)\mu(\tau)d\tau+\int_0^l g_2(x,t)dx \tag{19}$$

Заметим, что

$$\int_0^l G_\xi(x,t,l,\tau)d\xi=-\int_0^l G_x(x,t,l,\tau)dx=-G(l,t;l,\tau)+G(0,t;l,\tau);$$

Тогда (19) примет вид

$$\int_0^l u(x,t)dx=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t G(0,t;l,\tau)\mu(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\left(\int_0^l k(x,t,\tau)dx\right)\mu(\tau)d\tau+\int_0^l g_2(x,t)dx \tag{20}$$

Теперь умножим обе части (18) при $x=l$ на $h(t,\tau)$ и интегрируем по τ от 0 до t, меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_0^t h(t,\tau)u(l,t)d\tau=\int_0^t\mu(\tau)\left\{\int_\tau^t h(t,s)\Big[G_\xi(l,s;l,\tau)-k(l,\tau,s)\Big]ds\right\}d\tau+\int_0^t h(t,\tau)g_2(l,\tau)d\tau \tag{21}$$

Отсюда используя условие (5), будем иметь

$$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}+\int_0^t k_1(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau=g_3(t) \tag{22}$$

здесь

$$k_1(t,\tau)=G(0,t;l,\tau)-\int_0^l K(x,t,\tau)dx-\int_\tau^t h(t,s)\Big[G_\xi(x,s;l,\tau)+k(x,\tau,s)\Big]ds;$$

$$g_3(t)=-\int_0^l g_2(x,t)dx+\int_0^t h(t,\tau)g_2(l,\tau)d\tau+\psi_3(t).$$

Уравнение (22) перепишем в виде

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{\mu(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}}=g_4(t), \tag{23}$$

где

$$g_4(t)=g_3(t)+\int_0^t k_1(t,\tau)\mu(\tau)d\tau.$$

Из условия согласования, имеем $g_4(0)=0$. Вычислим производную функции $g_4(t)$

$$g_4'(t)=g_3'(t)+k_1(t,t)\mu(t)+\int_0^t\frac{\partial k_1(t,\tau)}{\partial t}\mu(\tau)d\tau.$$

Пользуясь явным решением полученного интегрального уравнения Абеля (23), получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода в виде

$$\mu(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}g_5(t)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t k_2(t,\tau)\mu(\tau)d\tau, \tag{24}$$

здесь

$$k_2(t,\tau)=\frac{h(t,t)}{\sqrt{t-\tau}}+h(t,t)G(l,\tau;0,t)+\int_\tau^t\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}\frac{ds}{\sqrt{\tau-s}}ds+\int_\tau^t\frac{\partial h(t,\tau)}{\partial t}G(l,\tau;0,s)ds;$$

$$g_5(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g_4'(\tau)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad \text{— известная функция.}$$

В силу свойств функции Грина, легко показать [17], что

$$|k_1(t,\tau)| \le \frac{c_1}{\sqrt{t-\tau}}; \quad |K_1(t;\xi,\tau)| \le \frac{c_2}{\sqrt{t-\tau}}, \quad c_1,\ c_2 = \text{const} > 0.$$

Как показано в [17], уравнение (24) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода со слабой особенностью и правая часть непрерывна, тогда она имеет единственное решение в классе непрерывно-дифференцируемых функций.

Таким образом, разрешимость нелокальной задачи (1)–(5) доказана.

Список литературы/References

[1] Баренблатт Г. Н., Желтов Ю. П., Кочина И. Н., “Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах”, *Прикладная математика и механика*, **24**:5 (1960), 852–864. [Barenblatt G. I., Zheltov Yu. P., Kochina I. N., “Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks”, *J. Appl. Math. Mech.*, **24**:5 (1960), 1286–1303].

[2] Дзекцер Е. С., “Уравнения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах”, *Доклады АН СССР*, **220**:3 (1975), 540–543. [Dzektser E. S., “Equation of motion of underground water with a free surface in multilayer media”, *Soviet Physics Doklady*, **20**:3 (1975)].

[3] Чудновский А. Ф., *Теплофизика почвы*, Наука, М., 1976, 352 с. [Chudnovsky A. F., *Thermophysics of the soil*, Nauka, Moscow, 1976, 352 pp.]

[4] Голованчиков А. В., Симонова И. Э., Симонов Б. В., “Решение диффузионной задачи с интегральным граничным условием”, *Фундамент. и прикладн. матем.*, **7**:2 (2001), 339–349. [Golovanchikov A. B., Simonova I. E., Simonov B. V.,, “The solution of diffusion problem with integral boundary condition”, *Fundam. Prikl. Mat.*, **7**:2 (2001), 339–349].

[5] Cannon J.R. J., “The solution of the heat equation subject to the specification of energy”, *Quart. Appl. Math.*, **21**:2 (1963), 155 – 160.

[6] Камынин Л. И., “Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*, **4**:4 (1964), 1006–1023. [Kamynin L. I., “A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **4**:6 (1964), 33–59].

[7] Ионкин Н. И., “Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелолкальным условием”, *Дифференц. уравнения*, **13**:2 (1977), 294–304. [Ionkin N. I., “The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, *Differ. Uravn.*, **13**:2 (1977), 294–304].

[8] Ионкин Н. И., Моисеев Е. И., “О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями”, *Дифференц. уравнения*, **15**:7 (1979), 1284–1295. [Ionkin N. I., Moiseev E. I., “A problem for a heat equation with two-point boundary conditions”, *Differ. Uravn.*, **15**:7 (1979), 1284–1295].

[9] Самарский А. А., “О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **16**:11 (1980), 1925–1935. [Samarskii A. A., “Some problems of the theory of differential equations”, *Differ. Uravn.*, **16**:11 (1980), 1925–1935].

[10] Юрчук Н. И., “Смешанная задача с интегральным условием для некоторых араболических уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **22**:12 (1986), 2117-–2126. [Yurchuk N. J., “A mixed problem with an integral condition for some parabolic equations”, *Differ. Uravn*, **22**:12 (1986), 2117–2126].

[11] Кожанов А. И., “Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **7**:1 (2004), 51-–60. [Kozhanov A. I. , “A time-nonlocal boundary value problem for linear parabolic equations”, *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **7**:1 (2004), 51–60].

[12] Джураев Т. Д., Попелек Я., "О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка", *Дифференц. уравнения*, **27**:10 (1991), 1734 – 1745. [Dzhuraev T. D., Popelek Ya., "Classification and reduction to canonical form of third-order partial differential equations", *Differ. Equ.*, **27**:10 (1991), 1225–1235].

[13] Кожанов А. И., "Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера", *Дифференц. уравнения.*, **40**:6 (2004), 763 – 774. [Kozhanov A. I., "On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation", *Differ. Equ.*, **40**:6 (2004), 815–826].

[14] Кожанов А. И., Попов Н. С., "О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений", *Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.*, **10**:3 (2010), 46-–62. [Kozhanov A. I., Popov N. S., "On solvability to nonlocal boundary value problems for pseudoparabolic equations", *J. Math. Sci.*, **186**:3 (2012), 438–452].

[15] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высшая школа, М., 1995, 301 с. [Nakhushev A. M., Moscow, 1995, 301 pp.]

[16] Орынбасаров М. О., "Решение смешанной краевой задачи для уравнения третьего порядка составного типа в полуполосе", *Известия НАН РК. Сер. физ.–матем.*, 2009, № 1, 3–8. [Орынбасаров М. О., "Solution of a mixed problem for a third–order equation of composite type in a half-band", *Izv. NAN RK, Ser. Phis.–math.*, 2009, № 1, 3-8].

[17] Джураев Т. Д., *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*, Фан, Ташкент, 1979, 240 с. [Dzhuraev T. D., Fan Publ., Tashkent, 1979, 120 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Баренблатт Г. Н., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. 24, вып. 5, С. 852–864.

[2] Дзекцер Е. С. Уравнения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Доклады АН СССР. 1975. Т. 220, № 3, С. 540–543.

[3] Чудновский А. Ф. Теплофизика почвы. М.: «Наука», 1976. – 352 с.

[4] Голованчиков А. В., Симонова И. Э., Симонов Б. В. Решение диффузионной задачи с интегральным граничным условием // Фундамент. и прикладн. матем. 2001. Т. 7. вып. 2. С. 339–349.

[5] Cannon J.R. J. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. – vol. 21, №2. – P. 155 – 160.

[6] Камынин Л.И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1964. Т. 4. №4. – С. 1006–1023.

[7] Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелолкальным условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №2. – С. 294–304.

[8] Ионкин Н.И., Моисеев Е.И. О задаче для уравнения теплопроводности с двухточечными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1979. Том 15, №7. – С. 1284–1295.

[9] Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. – Т. 16. №11. – С.1925–1935.

[10] Юрчук Н.И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых араболических уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. №12. –С. 2117-–2126

[11] Кожанов А. И. Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. матем., 2004. Т. 7. №1. –С. 51-–60.

[12] Джураев Т.Д., Попелек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1991. – Т. 27. №10. – С. 1734 – 1745.

[13] Кожанов А.И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера.Дифференц. уравнения. 2004. – том 40, №6. – С. 763 – 774.

[14] Кожанов А.И., Попов Н.С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений. Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., 2010. Том 10, вып. 3. –С. 46-–62.
[15] Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.; Высшая школа. 1995. – 301 с.
[16] Орынбасаров М.О. Решение смешанной краевой задачи для уравнения третьего порядка составного типа в полуполосе. Известия НАН РК. Сер. физ.–матем. 2009, №1/ – С.3–8.
[17] Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент.: «Фан», 1979. – 240 с.

Для цитирования: Зикиров О. С., Сагдуллаева М. М. Разрешимость нелокальной задачи для уравнения третьего порядка с оператором теплопроводности в главной части // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2020. Т. 30. № 1. С. 20-30. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-20-30

For citation: Zikirov O. S., Sagdullayeva M M. Solvability of a non–local problem for a third–order equation with the heat operator in the main part, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2020, **30**: 1, 20-30. DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-20-30

Поступила в редакцию / Original article submitted: 22.03.2020

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2020. vol. 30. no.1. pp. 20–30.

DOI: 10.26117/2079-6641-2020-30-1-20-30

MSC 35K20, 35K35

SOLVABILITY OF A NON–LOCAL PROBLEM FOR A THIRD—ORDER EQUATION WITH THE HEAT OPERATOR IN THE MAIN PART

O. S. Zikirov, M M. Sagdullayeva

National University of Uzbekistan after named Mirzo Ulugbek, 100174. Universitetskaya St., 4. Tashkent. Republic of Uzbekistan

E-mail: zikirov@yandex.ru,sagdullayevam@mail.ru

In this paper, we considered the solvability of a non–local problem with integral condition for a third–order equation with head operatot in the main part. The existence and uniqueness of a regular solution to this problem are proved. The proof is based on reducing a non-local problem to the mixed problem for a loaded heat equation.

Key words: boundary–value problem, non–local condition, non–local problem, parabolic equation, Green's function, Volterra integral equation.