УДК 517.925.4

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Б. И. Эфендиев

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный научный центр "Кабардино-Балкарский научный центр РАН 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

В работе исследуется линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с оператором непрерывно распределенного дифференцирования, и для него изучается двухточечная краевая задача методом функции Грина. Вводится в рассмотрение специальная функция, в терминах которой строится функция Грина задачи Дирихле и доказываются основные свойства. Определены достаточные условия на ядро оператора непрерывно распределенного дифференцирования, гарантирующие выполнения условия разрешимости задачи Дирихле. В случае, когда однородная задача Дирихле для рассматриваемого однородного уравнения имеет нетривиальное решение получено неравенство типа Ляпунова для ядра оператора непрерывно распределенного дифференцирования.

Ключевые слова: оператор дробного интегродифференцирования, оператор непрерывно распределенного дифференцирования, задача Дирихле, неравенство типа Ляпунова.

© Эфендиев Б. И., 2019

Введение

В интервале $0 < x < l$ рассмотрим уравнение

$$u''(x) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha u(x) d\alpha = f(x), \quad (1)$$

где

$$D_{0x}^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{u(t) dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, \quad \alpha < 0,$$

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) = u(x), \quad \alpha = 0,$$

$$D_{0x}^{\alpha}u(x) = \frac{d^n}{dx^n} D_{0x}^{\alpha-n}u(x), \quad n-1 < \alpha \leq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

– оператор дробного интегродифференцирования (в смысле Римана-Лиувилля) порядка α [1,2], $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, $\mu(\alpha) \in L]0,1[$, $f(x) \in L]0,l[\cap C]0,l[$ – заданные функции.

Уравнение (1) относится к классу непрерывных дифференциальных уравнений [1,2]. В последнее время интегральный оператор в уравнении (1) называют оператором непрерывно распределенного дифференцирования, который был введен в работе [1].

При $\mu(\alpha) = 1$ интеграл в уравнении (1) обозначается так:

$$D_{ax}^{[\gamma;\delta]}u(x) = \int_{\gamma}^{\delta} D_{ax}^{\alpha}u(x)d\alpha. \quad (2)$$

В работе [2] были изучены свойства оператора (2), в частности, доказана положительность оператора непрерывного интегродифференцирования, получена формула непрерывного интегрирования по частям. В работе [3] построен оператор, обращающий оператор (2) и получены аналоги формулы Ньютона-Лейбница.

Для уравнения (1) при $\mu(\alpha) = 1$ построено фундаментальное решение и найдено решение задачи Дирихле [6].

В данной работе делается обобщение результатов работы [6], а именно, находятся достаточные условия на функцию $\mu(\alpha)$, гарантирующие выполнения условия разрешимости задачи Дирихле. В случае, когда однородная задача Дирихле для однородного уравнения (1) имеет нетривиальное решение получено неравенство типа Ляпунова относительно функции $\mu(\alpha)$.

Обозначения и постановка задачи

Далее будем обозначать через $(g * h)(x) = \int_0^x g(x-t)h(t)dt$ свертку Лапласа функций $g(x)$ и $h(x)$,

$$k_1(x) = \int_0^1 \mu(\alpha) \frac{x^{-\alpha} d\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad k(x) = (1 * k_1)(x) = \int_0^1 \mu(\alpha) \frac{x^{1-\alpha} d\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (3)$$

Регулярным решением уравнения (1) в интервале $]0,l[$ назовем функцию $u(x)$, принадлежащую классу $C[0,l] \cap C^2]0,l[$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $x \in]0,l[$.

Задача. Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в интервале $]0,l[$, удовлетворяющее условиям

$$u(0) = u_0, \quad u(l) = u_l, \quad (4)$$

где u_0, u_l – заданные константы.

Вспомогательные утверждения

Рассмотрим функцию

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x), \quad w_0(x) = x, \quad w_n(x) = (w_{n-1} * k)(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Лемма 1. Функция $W(x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) ряд (5) сходится равномерно относительно x ;
2) $W(x)$ является решением задачи

$$W''(x) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} W(x) d\alpha = 0, \quad (6)$$

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 1. \quad (7)$$

Доказательство. 1. Сначала найдем оценку для функции $k(x)$. Из соотношения (3) получим оценку

$$|k(x)| \leq \int_0^1 |\mu(\alpha)| \frac{(x/l)^{1-\alpha} l^{1-\alpha} d\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \leq \int_0^1 |\mu(\alpha)| \frac{l^{1-\alpha} d\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} \leq C \quad (8)$$

где $C = C(l)$ – положительная константа.

В силу оценки (8) из формулы (5) имеем неравенства

$$|w_1(x)| \leq \frac{Cx^2}{2!}, \quad |w_2(x)| \leq \frac{C^2x^3}{3!}, \quad \dots, \quad |w_n(x)| \leq \frac{C^n x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (9)$$

из которых следует равномерная сходимость ряда (5). С помощью неравенств (9) получим оценку для функции $W(x)$

$$|W(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{C} (e^{Cx} - 1), \quad C = C(l). \quad (10)$$

2. Покажем что функция $W(x)$ является решением задачи (6), (7). Из формулы (3) видно, что $k(0) = 0$, в силу которого из представления (5) непосредственно вытекают равенства

$$W'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w'_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x), \quad v_0(x) = 1, \quad v_n(x) = (v_{n-1} * k)(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (11)$$

$$W''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} w''_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x), \quad v_0(x) = k(x), \quad v_n(x) = (v_{n-1} * k)(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (12)$$

$$W(0) = 0, \quad W'(0) = 1, \quad W''(0) = 0. \quad (13)$$

Из оценок (8) и (10) следует равномерная сходимость рядов (11) и (12).

Учитывая определения оператора дробного интегродифференцирования и свертки Лапласа, а также равенств (3), (11) и $W(0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha W(x) d\alpha &= \frac{d}{dx} \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha-1} W(x) d\alpha = \frac{d}{dx} \int_0^x W(x-t) \int_0^1 \mu(\alpha) \frac{t^{-\alpha} d\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} dt = \\ &= \frac{d}{dx} (W * k_1)(x) = (W' * k_1)(x) = (1 * k_1)(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_{n-1} * k * k_1)(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Замечая, что $k(x) = (1 * k_1)(x)$, из соотношения (14) имеем что

$$\int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha W(x) d\alpha = k(x) + (k * k)(x) + (k * k * k)(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) = W''(x), \quad (15)$$

из которого следует формула (6).

Функция Грина

Введем в рассмотрение функцию двух переменных, определенную в компакте $\overline{\Omega} = [0, l] \times [0, l]$

$$G(x, t) = H(x-t)W(x-t) - \frac{1}{W(l)} [W(x)W(l-t)], \quad (16)$$

где $H(x)$ – функция Хевисайда.

Определение. Функцией Грина задачи Дирихле для уравнения (1) назовем функцию $v(x, t)$, обладающую следующими свойствами:

1. $v(x, t)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$.
2. $v(x, t)$ как функция переменной x является решением задачи

$$v_{xx}(x, t) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha v(x, t) d\alpha = 0, \quad v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad (17)$$

по переменной t является решением задачи

$$v_{tt}(x, t) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{tt}^\alpha v(x, t) d\alpha = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v(x, l) = 0. \quad (18)$$

3. При $t = x$ производные $v_x(x, t)$ и $v_t(x, t)$ имеют скачок, равный единице, то есть

$$v_x(x, x+0) - v_x(x, x-0) = -1, \quad (19)$$

$$v_t(x, x+0) - v_t(x, x-0) = 1. \quad (20)$$

Лемма 2. Пусть выполнено условие $W(l) \neq 0$. Тогда $G(x, t)$ является функцией Грина задачи Дирихле для уравнения (1).

Доказательство. Первое свойство следует из непрерывности функций $W(x)$, $W'(x)$ и представления (16).

Второе свойство доказывается непосредственной подстановкой равенства (16) в формулы (17), (18) с учетом соотношений (6), (13)

$$\begin{aligned}
 G_{xx}(x,t) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha G(x,t) d\alpha &= \\
 &= H(x-t) \left[W''(x-t) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha W(x-t) d\alpha \right] - \\
 &- \frac{W(l-t)}{W(l)} \left[W'''(x-t) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha W'(x-t) d\alpha \right] = 0, \\
 G_{tt}(x,t) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{tt}^\alpha G(x,t) d\alpha &= \\
 &= H(x-t) \left[W''(x-t) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha W(x-t) d\alpha \right] + \\
 &+ \frac{W(l-t)}{W(l)} \left[W'''(x-t) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha W'(x-t) d\alpha \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Из представления (16) видно, что функция $G(x,t)$ непрерывна на компакте $[0,l] \times [0,l]$ и в силу соотношения $W(0) = 0$ имеют место равенства

$$G(0,t) = 0, \quad G(l,t) = 0, \quad G(x,0) = 0, \quad G(x,l) = 0. \quad (21)$$

Дифференцируя равенство (16) по x и по t

$$G_x(x,t) = H(x-t)W'(x-t) - \frac{1}{W(l)} \left[W'(x)W(l-t) \right], \quad (22)$$

$$G_t(x,t) = -H(x-t)W'(x-t) + \frac{1}{W(l)} \left[W(x)W'(l-t) \right], \quad (23)$$

и подставляя формулы (22), (23) в соотношения (19), (20) с учетом того что $W(x)$ – непрерывная функция, а $H(x)$ – разрывная в нуле функция, с учетом равенств (7) получим

$$\begin{aligned}
 G_x(x, x+0) - G_x(x, x-0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} H(\varepsilon)W'(0) - \frac{1}{W(l)} \left[W'(x)W(l-x) \right] - \\
 &- \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H(\varepsilon)W'(0) + \frac{1}{W(l)} \left[W'(x)W(l-x) \right] = -1, \\
 G_t(x, x+0) - G_t(x, x-0) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} H(\varepsilon)W'(0) + \frac{1}{W(l)} \left[W'(x)W(l-x) \right] +
 \end{aligned}$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} H(\varepsilon)W'(0) - \frac{1}{W(l)} \left[W'(x)W(l-x) \right] = 1$$

что доказывает справедливость формул (19) и (20).

Из соотношений (22), (23) в силу формулы $W(0) = 0$ следуют равенства

$$G_x(x, 0) = 0, \quad G_x(x, l) = 0, \quad G_t(x, 0) = -W'(x) + \frac{W(x)W'(l)}{W(l)}, \quad G_t(x, l) = \frac{W(x)}{W(l)}. \quad (24)$$

Представление решения

Теорема. Пусть $f(x) \in L[0, l] \cap C[0, l]$. Тогда при выполнении условия разрешимости $W(l) \neq 0$ существует единственное регулярное решение задачи (1), (4). Решение имеет вид

$$u(x) = -u_0 G_t(x, 0) + u_l G_t(x, l) + \int_0^l G(x, t) f(t) dt. \quad (25)$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ – регулярное решение уравнения (1). Умножим обе части уравнения (1) на функцию $G(x, t)$ предварительно поменяв в нем переменную x на t и проинтегрируем полученное равенство по t в пределах от 0 до l . Тогда имеем

$$\int_0^l G(x, t) u''(t) dt - \int_0^l G(x, t) \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0t}^\alpha u(t) d\alpha dt = \int_0^l G(x, t) f(t) dt. \quad (26)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое левой части равенства (26), учитывая что функция $G_t(x, t)$ имеет разрыв, предварительно разбив промежуток интегрирования на два промежутка от 0 до x и от x до l , будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} G(x, t) u''(t) dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[u'(l-\varepsilon) G(x, l-\varepsilon) - u'(\varepsilon) G(x, \varepsilon) - \int_{\varepsilon}^x G_t(x, t) u'(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_x^{l-\varepsilon} G_t(x, t) u'(t) dt \right] = u'(l) G(x, l) - u'(0) G(x, 0) - u(l) G_t(x, l) + u(0) G_t(x, 0) + \\ &\quad + u(x) [G_t(x, x+0) - G_t(x, x-0)] + \int_0^l G_{tt}(x, t) u(t) dt. \end{aligned} \quad (27)$$

В силу формулы дробного интегрирования по частям и равенства

$$D_{lx}^{-\alpha} u'(x) = u(l) \frac{(l-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} - D_{lx}^{1-\alpha} u(x), \quad \alpha \in]0, 1[$$

второе слагаемое левой части формулы (26) перепишется в виде

$$\int_0^l G(x, t) \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0t}^\alpha u(t) d\alpha dt = G(x, l) \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0l}^{\alpha-1} u(t) d\alpha - G(x, 0) \int_0^1 \mu(\alpha) D_{00}^{\alpha-1} u(t) d\alpha -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^l G_t(x, t) \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0t}^{\alpha-1} u(t) d\alpha dt = G(x, l) \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0l}^{\alpha-1} u(t) d\alpha - \\
& - \int_0^l u(t) \int_0^1 \mu(\alpha) D_{lt}^{\alpha-1} G_t(x, t) d\alpha dt = \int_0^l u(t) \int_0^1 \mu(\alpha) D_{lt}^{\alpha} G(x, t) d\alpha dt, \quad (28)
\end{aligned}$$

так как в силу равенств (3) и (14) предел $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0t}^{\alpha-1} u(t) d\alpha = 0$.

Учитывая формулы (20), (27) и (28) из равенства (26) получим

$$\begin{aligned}
& u(x) + \int_0^l u(t) \left[G_{tt}(x, t) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{lt}^{\alpha} G(x, t) d\alpha \right] dt = \\
& = -u'(l)G(x, l) + u'(0)G(x, 0) + u(l)G_t(x, l) - u(0)G_t(x, 0) + \int_0^l G(x, t)f(t)dt,
\end{aligned}$$

из которого в силу соотношений (4) и (18) получаем формулу (25).

Покажем теперь, что функция $u(x)$, определяемая формулой (25), действительно является решением задачи (1), (4). Дифференцируя дважды равенство (25) с учетом формул (19) и (24) будем иметь

$$u'(x) = -u_0[G_t(x, 0)]' + u_l[G_t(x, l)]' + \int_0^l G_x(x, t)f(t)dt, \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
u''(x) &= -u_0[G_t(x, 0)]'' + u_l[G_t(x, l)]'' + \frac{d}{dx} \left[\int_0^x G_x(x, t)f(t)dt + \int_x^l G_x(x, t)f(t)dt \right] = \\
&= -u_0[G_t(x, 0)]'' + u_l[G_t(x, l)]'' + \int_0^l G_{xx}(x, t)f(t)dt + f(x). \quad (30)
\end{aligned}$$

Далее из формулы (25) имеем, что

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} u(x) d\alpha &= -u_0 \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} G_t(x, 0) d\alpha + u_l \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} G_t(x, l) d\alpha + \\
&+ \int_0^l f(t) \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^{\alpha} G(x, t) d\alpha dt. \quad (31)
\end{aligned}$$

Подставляя формулы (30) и (31) в уравнение (1), в силу равенств (6) и (7), получаем что функция, определяемая соотношением (25), действительно является решением задачи (1), (4).

Замечание. 1. При $\mu(\alpha) \geq 0$ условие разрешимости $W(l) \neq 0$ выполняется.

2. В случае $W(l) = 0$ нарушается единственность решения задачи (1), (4).

Действительно, из второго равенства (3) видно, что при $\mu(\alpha) \geq 0$ функция $k(x) \geq 0$. Отсюда, из формулы (5) следует что $W(l)$ представляет собой знакопостоянный

числовой ряд с положительными членами, и поэтому сумма этого ряда отлична от нуля, то есть $W(l) \neq 0$.

2. Если $W(l) = 0$, то однородная задача

$$u''(x) - \int_0^1 \mu(\alpha) D_{0x}^\alpha u(x) d\alpha = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \quad (32)$$

имеет ненулевое решение. В частности, любая функция $u(x) = cW(x)$, $c - \text{const}$, является решением задачи (32).

Неравенство типа Ляпунова

Лемма 3. Пусть однородная задача (32) имеет нетривиальное решение. Тогда справедливо неравенство

$$\sup_{x \in]0, l[} \int_0^l |K(x, t)| dt \geq 1, \quad K(x, t) = H(x - t)k(x - t) - \frac{x}{l}k(l - t). \quad (33)$$

Доказательство. Задача (32) эквивалентна однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$u(x) = \int_0^l u(t)K(x, t)dt, \quad (34)$$

из которого следует неравенство

$$\bar{u} \leq \bar{u} \sup_{x \in]0, l[} \int_0^l |K(x, t)| dt, \quad \bar{u} = \sup_{x \in]0, l[} u(x)$$

или с учетом того, что $\bar{u} \neq 0$, получим (33).

Соотношение (33) называется *неравенством типа Ляпунова*.

Следствие. Если выполняется неравенство

$$\int_0^1 |\mu(\alpha)| \frac{l^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} d\alpha < \frac{1}{2},$$

то исходная задача (1), (4) имеет единственное решение, которое определяется равенством (25).

Запишем неравенство (33) в терминах функции $\mu(\alpha)$. В силу неравенства

$$|K(x, t)| \leq 2 \int_0^1 |\mu(\alpha)| \frac{(l-t)^{1-\alpha} d\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}$$

перепишем соотношение (33) в виде

$$1 \leq \sup_{x \in]0, l[} \int_0^l |K(x, t)| dt \leq 2 \int_0^l \int_0^1 |\mu(\alpha)| \frac{(l-t)^{1-\alpha} d\alpha}{\Gamma(2-\alpha)} dt = 2 \int_0^1 |\mu(\alpha)| \frac{l^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} d\alpha.$$

Список литературы/References

- [1] Нахушев А. М., “О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах”, *Докл. АН СССР*, **300**:4. (1988), 796–799. [“O nepreryvnykh differentsial’nykh uravneniyakh i ikh raznostnykh analogakh”, *Dokl. AN SSSR*, **300**:4. (1988), 796–799, (in Russian)].
- [2] Нахушев А. М., “О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа”, *Дифференц. уравнения*, **34**:1 (1998), 101–109. [Nakhushhev A. M., “O polozhitel’nosti operatorov nepreryvnogo i diskretnogo differentsirovaniya i integrirovaniya ves’ma vazhnykh v drobnom ischislenii i v teorii uravneniy smeshannogo tipa”, *Differents. uravneniya*, **34**:1 (1998), 101–109, (in Russian)].
- [3] Псху А. В., “К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка”, *Дифференц. уравнения*, **40**:1 (2004), 120–127. [Pskhu A. V., “K teorii operatora integro-differentsirovaniya kontinual’nogo poryadka”, *Differents. uravneniya*, **40**:1 (2004), 120–127, (in Russian)].
- [4] Kochubei A. N., “Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion”, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, № 340, 252–281.
- [5] Fedorov V. E., Streletskaya E. M., “Initial-value Problems for Linear Distributed-order Differential Equations in Banach Spaces”, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2018, № 176, 1–17.
- [6] Efendiyev B. I., “Zadacha Koshi dlya obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya vtorogo poryadka s kontinual’noy proizvodnoy”, *Differents. uravneniya*, **47**:9 (2011), 1364–1368, (in Russian).
- [7] Эфендиев Б. И., “Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной”, *Мат. заметки*, **97**:4 (2015), 620–628. [Efendiyev B. I., “Zadacha Dirikhle dlya obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya vtorogo poryadka s kontinual’noy proizvodnoy”, *Mat. zametki*, **97**:4 (2015), 620–628, (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Нахушев А. М. О непрерывных дифференциальных уравнениях и их разностных аналогах // Докл. АН СССР. 1988. Т. 300, № 4. С. 796–799.
- [2] Нахушев А. М. О положительности операторов непрерывного и дискретного дифференцирования и интегрирования весьма важных в дробном исчислении и в теории уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 101–109.
- [3] Псху А. В. К теории оператора интегро-дифференцирования континуального порядка // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 120–127.
- [4] Kochubei A. N. Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // J. Math. Anal. Appl. 2008. vol. 340. 252–281.
- [5] Fedorov V. E., Streletskaya E. M. Initial-value Problems for Linear Distributed-order Differential Equations in Banach Spaces // Electronic Journal of Differential Equations. 2018. № 176. pp. 1–17.
- [6] Эфендиев Б. И. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47. № 9. С. 1364–1368.
- [7] Эфендиев Б. И. Задача Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с континуальной производной // Мат. заметки. 2015. Т. 97. № 4. С. 620–628.

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-48-57

MSC 34L99

THE DIRICHLET PROBLEM FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH THE OPERATOR OF DISTRIBUTED DIFFERENTIATION

B. I. Efendiev

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik,
Shortanova st., 89 A, Russia

E-mail: beslan_efendiev@mail.ru

In this paper, we study a linear ordinary differential equation of the second order with operator of continuously distributed differentiation, and for him we study the two-point boundary value problem by the Green's function method. A special function is introduced, in terms of which the Green function of the Dirichle problem is constructed and the main properties are proved. Sufficient conditions on the kernel of the operator of continuously distributed differentiation are determined that guarantee the fulfillment of the solvability condition for the Dirichlet problem. In the case when the homogeneous Dirichlet problem for the homogeneous equation under consideration has a nontrivial solution, an analog of the Lyapunov inequality is obtained for the kernel of a continuously distributed differentiation operator.

Key words: fractional integro-differentiation operator, operator of continuously distributed differentiation, fundamental solution, Cauchy problem, Dirichlet problem, analog of Lyapunov's inequality

© Efendiev B. I., 2019