УДК 517.927

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С РАЗЛИЧНЫМИ НАЧАЛАМИ

Л. М. Энеева

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный научный центр "Кабардино-Балкарский научный центр РАН", 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: eneeva72@list.ru

В работе исследуется обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка, содержащее композицию дробных производных с различными началами, с переменным потенциалом. Рассматриваемое уравнение выступает модельным уравнением движения во фрактальной среде. Для исследуемого уравнения доказана априорная оценка решения смешанной двухточечной краевой задачи.

Ключевые слова: дробная производная Римана-Лиувилля, дробная производная Капуто, краевая задача, априорная оценка.

© Энеева Л. М., 2019

Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} \partial_{1x}^{\alpha} u(x) - q(x)u(x) = f(x), \quad (1)$$

где D_{0x}^{α} и ∂_{1x}^{α} — дробные производные порядка α , $0 < \alpha < 1$, по переменной $x \in]0, 1[$, в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке $x = 0$, и в смысле Капуто с началом в точке $x = 1$, соответственно, $[1]$; $q(x)$ и $f(x)$ — заданные на отрезке $[0, 1]$ функции.

Как известно, аналитический аппарат дробного интегро-дифференцирования и теория дифференциальных уравнений дробного порядка демонстрируют высокую эффективность при описании и математическом моделировании разнообразных физических и геофизических процессов, протекающих во фрактальных средах [1]. Использование понятия эффективной скорости изменения ряда параметров моделируемых систем, приводит к дифференциальным уравнениям, содержащим композицию операторов дробного дифференцирования с различными началами [2], [3].

Различные аспекты теории дифференциальных уравнений вида (1), включая вопросы разрешимости краевых задач, спектральные вопросы и т.п., а также их приложений, изучались в работах [4] – [13].

В данной работе мы доказываем априорную оценку для решений смешанной двухточечной краевой задачи для уравнения (1).

Краевая задача

Регулярным решением уравнения (1) будем называть функцию $u(x)$ такую, что $u(x) \in AC[0, 1]$ и $D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x) \in AC[0, 1]$, и удовлетворяющую уравнению (1). Как обычно, $AC[0, 1]$ обозначает пространство абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций.

Будем рассматривать следующую задачу: *найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$au(0) + b [D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x)]_{x=0} = 0, \quad u(1) = 0, \quad (2)$$

где a и b заданные постоянные, причем $a^2 + b^2 \neq 0$.

Заметим, что при $\alpha = 1$ величина $D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x)$ становится равной $-u'(x)$. Поэтому первое из условий (2) представляет собой аналог условия третьего рода. При $b = 0$ рассматриваемые условия превращаются в условия Дирихле.

Обозначения и вспомогательные утверждения

Далее будем использовать следующие обозначения

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^1 g^2(t) dt}, \quad \langle g, h \rangle = \int_0^1 g(t) h(t) dt$$

Приведем в форме леммы одно интегральное неравенство, которое нам понадобится в дальнейшем.

Лемма. Пусть $\alpha \in]1/2, 1[$, $g(x) \in AC[0, 1]$ и $g(1) = 0$. Справедливо неравенство

$$\|g\|^2 \leq \frac{1}{C_\alpha} \|\partial_{1x}^\alpha g\|^2, \quad (3)$$

где

$$C_\alpha = 2\alpha(2\alpha - 1)\Gamma^2(\alpha). \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $h(x) = \partial_{1x}^\alpha g(x)$. Тогда в силу условий, наложенных на $g(x)$, имеем

$$h(x) \in L[0, 1]$$

и

$$D_{1x}^{-\alpha} h(x) = g(x).$$

Отсюда, применяя неравенство Коши, получаем

$$g^2(x) = \left(\int_x^1 \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} h(t) dt \right)^2 \leq$$

$$\leq \int_x^1 \frac{(t-x)^{2\alpha-2}}{\Gamma^2(\alpha)} dt \cdot \int_x^1 h^2(t) dt = \frac{(1-x)^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_x^1 h^2(t) dt.$$

Из этого следует, что

$$\begin{aligned} \|g\|^2 &= \int_0^1 g^2(x) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{2\alpha-1} \int_x^1 h^2(t) dt dx = \\ &= \frac{1}{(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)} \int_0^1 h^2(t) \int_0^t (1-x)^{2\alpha-1} dx dt = \\ &= [2\alpha(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)]^{-1} \int_0^1 h^2(t) [1 - (1-t)^{2\alpha}] dt. \end{aligned}$$

Последнее, с учетом принятых обозначений, доказывает (3). $\square$

Неравенство (3) является аналогом неравенства Пуанкаре-Фридрихса для дробных производных. Доказательство более общих неравенств такого типа можно найти в [14] (см. также [15]).

Априорная оценка

Пусть $u(x)$ — регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2). Домножив обе части уравнения (1) на $u(x)$ и проинтегрировав от 0 до 1, получим

$$\int_0^1 u(x) D_{0x}^\alpha \partial_{1x}^\alpha u(x) dx - \int_0^1 q(x) u^2(x) dx = \int_0^1 f(x) u(x) dx = \langle u, f \rangle. \quad (5)$$

Для первого слагаемого в левой части (5) имеем

$$\int_0^1 u(x) D_{0x}^\alpha \partial_{1x}^\alpha u(x) dx = u(x) D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 u'(x) D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x) dx.$$

Принимая во внимание второе из краевых условий (2), а также формулу дробного интегрирования по частям и определение производной Капуто, получим

$$\int_0^1 u(x) D_{0x}^\alpha \partial_{1x}^\alpha u(x) dx = -u(0) [D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x)]_{x=0} + \int_0^1 [\partial_{1x}^\alpha u(x)]^2 dx.$$

С учетом этого, равенство (5) можем переписать в виде

$$\int_0^1 [\partial_{1x}^\alpha u(x)]^2 dx - \int_0^1 q(x) u^2(x) dx = \langle u, f \rangle + u(0) [D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x)]_{x=0}.$$

В силу (3) отсюда следует, что

$$\int_0^1 [C_\alpha - q(x)] u^2(x) dx \leq \langle u, f \rangle + u(0) [D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x)]_{x=0}, \quad (6)$$

где постоянная C_α определена формулой (4).

Теорема. Пусть $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$, $q(x), f(x) \in L^2[0, 1]$, $u(x)$ — регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), и выполнены неравенства

$$a \cdot b \geq 0 \quad (7)$$

u

$$\operatorname{ess\,sup}_{[0,1]} q(x) = Q < C_\alpha = 2\alpha(2\alpha - 1)\Gamma^2(\alpha). \quad (8)$$

Тогда имеет место оценка

$$\|u\|^2 \leq K_\alpha \|f\|^2, \quad (9)$$

где

$$K_\alpha = \frac{1}{C_\alpha - Q}.$$

Доказательство. Примем обозначения

$$c = u(0), \quad d = [D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x)]_{x=0}. \quad (10)$$

Из (2) следует, что

$$0 = (ac + bd)^2 = (ac)^2 + 2abcd + (bd)^2,$$

или

$$2abcd = -(ac)^2 - (bd)^2 \leq 0.$$

Поэтому, с учетом (7) и (10), имеем

$$u(0) [D_{0x}^{\alpha-1} \partial_{1x}^\alpha u(x)]_{x=0} \leq 0.$$

Кроме того, в силу (8), можем написать

$$\int_0^1 [C_\alpha - q(x)] u^2(x) dx \geq (C_\alpha - Q) \|u\|^2.$$

Из (6), принимая во внимание последние два неравенства, получаем

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{C_\alpha - Q} \langle u, f \rangle = K_\alpha \langle u, f \rangle. \quad (11)$$

В силу неравенства Юнга, для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\langle u, f \rangle \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|^2. \quad (12)$$

Из (11) и (12), при условии, что $\varepsilon K_\alpha < 2$, следует неравенство

$$\|u\|^2 \leq \frac{1}{\varepsilon(2 - \varepsilon K_\alpha)} \|f\|^2.$$

Последнее, с учетом равенства

$$\inf_{0 < \varepsilon < \frac{2}{K_\alpha}} [\varepsilon(2 - \varepsilon K_\alpha)]^{-1} = K_\alpha$$

доказывает (9). $\square$

Список литературы/References

- [1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, Москва, 2003, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye*, Fizmatlit, Moskva, 2003, 272 pp., (in Russian)].
- [2] Рехвиашвили С. Ш., “Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики”, *Письма в ЖТФ*, **30**:2 (2004), 33–37. [Rekhviashvili S. Sh., “Formalizm Lagranzha s drobnou proizvodnoy v zadachakh mekhaniki”, *Pis'ma v ZHTF*, **30**:2 (2004), 33–37, (in Russian)].
- [3] Рехвиашвили С. Ш., “К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования”, *Нелинейный мир*, **5**:4 (2007), 194–197. [Rekhviashvili S. Sh., “K opredeleniyu fizicheskogo smysla drobnogo integro-differentsirovaniya”, *Nelineynyy mir*, **5**:4 (2007), 194–197, (in Russian)].
- [4] Stanković B., “An equation with left and right fractional derivatives”, *Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série*, **80(94)** (2006), 259–272.
- [5] Atanackovic T. M., Stankovic B., “On a differential equation with left and right fractional derivatives”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **10**:2 (2007), 139–150.
- [6] Torres C., “Existence of a solution for the fractional forced pendulum”, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, **13**:1 (2014), 125–142.
- [7] Энеева Л. М., “Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными начальными”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, **3**:2(11) (2015), 39–44. [Eneyeva L. M., “Krayevaya zadacha dlya differentsial'nogo uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, **3**:2(11) (2015), 39–44, (in Russian)].
- [8] Tokmagambetov N., Torebek B. T., “Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator”, *Documenta Mathematica*, **21** (2016), 1503–1514.
- [9] Энеева Л. М., “Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными начальными”, *Известия КБНЦ РАН*, 2017, № 1(75), 34–40. [Eneyeva L. M., “Otsenka pervogo sobstvennogo znacheniya zadachi Dirikhle dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami”, *Izvestiya KBNTS RAN*, 2017, № 1(75), 34–40, (in Russian)].
- [10] Энеева Л. М., “О задаче Неймана для уравнения с дробными производными с различными начальными”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018, № 4(24), 61–65. [Eneyeva L. M., “O zadache Neymana dlya uravneniya s drobnymi proizvodnymi s razlichnymi nachalami”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2018, № 4(24), 61–65, (in Russian)].
- [11] Энеева Л. М., “Нерваенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными начальными”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2019, № 3(28), 32–49. [Eneyeva L. M., “Nervayenstvo Lyapunova dlya uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2019, № 3(28), 32–49, (in Russian)].
- [12] Eneeva L.M., Pskhu A.V., Potapov A.A., Feng T., Rekhviashvili S.Sh., “Lyapunov inequality for a fractional differential equation modeling damped vibrations of thin film MEMS”, *Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19100)*, 2019.
- [13] Rekhviashvili S.Sh., Pskhu A.V., Potapov A.A., Feng T., Eneeva L.M., “Modeling damped vibrations of thin film MEMS”, *Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19101)*, 2019.
- [14] George A. Anastassiou, “Fractional representation formulae and right fractional inequalities”, *Mathematical and Computer Modelling*, 2011, № 54, 3098–3115.
- [15] George A. Anastassiou, *Fractional Differentiation Inequalities*, Springer-Verlag, New York, 2009, 675 pp.

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
- [2] Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. №2. С. 33–37.
- [3] Рехвиашвили С. Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования // Нелинейный мир. 2007. Т. 5. №4. С. 194–197
- [4] Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives // Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série. 2006. vol. 80(94). pp. 259–272.
- [5] Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2007. vol. 10. issue 2. pp. 139–150.
- [6] Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2014. vol. 13. issue 1. pp. 125–142.
- [7] Энеева Л. М. Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. vol. 2(11). С. 39–44
- [8] Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator // Documenta Mathematica. 2016. vol. 21. pp. 1503–1514
- [9] Энеева Л. М. Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Известия КБНЦ РАН. 2017. №1(75). С. 34–40
- [10] Энеева Л. М. О задаче Неймана для уравнения с дробными производными с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. №4(24). С. 61–65.
- [11] Энеева Л. М. Неравенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. 3(28). С. 32–49.
- [12] Eneeva L.M., Pskhu A.V., Potapov A.A., Feng T., Rekhviashvili S.Sh. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modeling damped vibrations of thin film MEMS. Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19100).
- [13] Rekhviashvili S.Sh., Pskhu A.V., Potapov A.A., Feng T., Eneeva L.M. Modeling damped vibrations of thin film MEMS // Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19101)
- [14] George A. Anastassiou. Fractional representation formulae and right fractional inequalities // Mathematical and Computer Modelling. 2011. vol. 54. p. 3098–3115.
- [15] George A. Anastassiou. Fractional Differentiation Inequalities. New York: Springer-Verlag, 2009. 675 с.

Для цитирования: Энеева Л. М. Априорная оценка для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 29. № 4. С. 41-47. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-41-47

For citation: Eneeva L. M. A priori estimate for an equation with fractional derivatives with different origins, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2019, **29**: 4, 41-47. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-41-47

Поступила в редакцию / Original article submitted: 20.11.2019

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-41-47

MSC 26A33

A PRIORI ESTIMATE FOR AN EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES WITH DIFFERENT ORIGINS

L. M. Eneeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik,
Shortanova st., 89 A, Russia
E-mail: eneeva72@list.ru

We consider an ordinary differential equation of fractional order with the composition of left- and right-sided fractional derivatives, and with variable potential. The considered equation is a model equation of motion in fractal media. We prove an a priori estimate for solutions of a mixed two-point boundary value problem for the equation under study.

Key words: Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, boundary value problem, a priori estimate

© Eneeva L. M., 2019