УДК 517.954

АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ОБОБЩЕННОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ КАПУТО ПО ВРЕМЕНИ

А. М. Шхагапсоев

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а
E-mail: sh2ps@yandex.ru

Рассматривается краевая задача для уравнения третьего порядка параболического типа с дробной производной Капуто. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка решения обобщенной нелокальной краевой задачи для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капуто по времени.

Ключевые слова: априорная оценка, нелокальная краевая задача, уравнение с кратными характеристиками, метод интегралов энергии, дробная производная по Капуто

© Шхагапсоев А. М., 2019

Введение

Уравнение третьего порядка с кратными характеристиками содержащее производную первого порядка по времени

$$u_y = u_{xxx} + a_1(x, y) + a_2(x, y) + f(x, y), \quad (*)$$

впервые было рассмотрено в работах [1]– [3] при $a_1(x, y) = a_2(x, y) = f(x, y) = 0$. Полученные в них результаты были обобщены для уравнения $(2n-1)$ -го порядка в работе [4]. В работе [5] построены фундаментальные решения с применением преобразования Лапласа, теории потенциалов и получены оценки этих решений.

В настоящей работе методом энергетических неравенств получены априорные оценки решения краевых задач для уравнения с кратными характеристиками с дробной производной Капуто по времени, которая обобщает результаты полученные в работах [6]– [11].

Задача

В прямоугольнике $\bar{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq r, \quad 0 \leq y \leq h\}$ рассмотрим следующую краевую задачу

$$\partial_{0y}^\alpha u = \lambda_1 u_{xx} + \lambda_2 u + \lambda_3 u + f(x, y), \quad 0 < x < r, \quad 0 < y \leq h, \quad (1)$$

$$u(0, y) = a(y)u(r, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (2)$$

$$u_x(0, y) = b(y)u_x(r, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (3)$$

$$u_{xx}(0, y) = c(y)u_{xx}(r, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad (4)$$

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (5)$$

где

$$\partial_{0y}^\alpha u(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u_\tau(x, \tau)}{(y-\tau)^\alpha} d\tau$$

– дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$ [12].

В дальнейшем будем предполагать существование решения $u(x, y) \in C^{3,1}(\bar{D})$ задачи (1) – (5), где $C^{3,1}(\bar{D})$ – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными третьего порядка по x и первого порядка по y на $\bar{D}$.

Введем следующие обозначения:

$$\|u\|_0^2 = \int_0^r u^2(x, y) dx, \quad D_{0y}^{-\alpha} u(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^y \frac{u(x, \tau)}{(y-\tau)^{1-\alpha}} d\tau$$

– дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка α [13].

Справедлива следующая

Теорема. Если $\lambda_1(a(y)c(y) - 1)$, $\lambda_1(b^2(y) - 1)$, $\lambda_2(1 - c^2(y)) \leq 0$, $\lambda_3 \leq 0$, $f(x, y) \in C(\bar{D})$, то для решения $u = u(x, y)$ задачи (1) – (5) справедлива априорная оценка

$$\|u\|_0^2 \leq M \left(D_{0y}^{-\alpha} \|f\|_0^2 + \|\tau\|_0^2 \right), \quad (6)$$

где M положительная константа.

Доказательство. Умножая уравнение (1) на $u = u(x, y)$ и интегрируя по x от 0 до r :

$$\int_0^r u \partial_{0y}^\alpha u dx = \lambda_1 \int_0^r ((uu_{xx})_x - u_x u_{xx}) dx + \lambda_2 \int_0^r \left(\frac{u^2}{2} \right)_x dx + \lambda_3 \int_0^r u^2 dx + \int_0^r u f dx. \quad (7)$$

После преобразований, тождество (7) примет вид

$$\int_0^r u(x, y) \partial_{0y}^\alpha u(x, y) dx = \lambda_1 \left(u(r, y) u_{xx}(r, y) - u(0, y) u_{xx}(0, y) - \frac{u_x^2(r, y) - u_x^2(0, y)}{2} \right) +$$

$$+ \lambda_2 \left(\frac{u^2(r, y) - u^2(0, y)}{2} \right) + \lambda_3 \|u\|_0^2 + \int_0^r u(x, y) f(x, y) dx. \quad (8)$$

Преобразовывая слагаемые, входящие в тождество (8), с учетом однородных условий (2)-(4) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^r u(x, y) \partial_{0y}^\alpha u(x, y) dx &= \lambda_1 (1 - a(y)c(y)) u_{xx}(r, y) u(r, y) + \lambda_1 (b^2(y) - 1) \frac{u_x^2(r, y)}{2} + \\ &+ \lambda_2 (1 - c^2(y)) \frac{u^2(r, y)}{2} + \lambda_3 \|u\|_0^2 + \int_0^r u(x, y) f(x, y) dx. \end{aligned}$$

Согласно условиям теоремы, получим

$$\int_0^r u(x, y) \partial_{0y}^\alpha u(x, y) dx \leq \lambda_3 \|u\|_0^2 + \int_0^r u(x, y) f(x, y) dx. \quad (9)$$

Преобразовывая слагаемые входящее в неравенство (9), имеем

$$\partial_{0y}^\alpha \|u\|_0^2 \leq 2(\varepsilon + \lambda_\varepsilon) \|u\|_0^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|f\|_0^2. \quad (10)$$

Применив к обеим частям неравенства (10) оператор дробного интегрирования $D_{0y}^{-\alpha}$, приходим к априорной оценке (6) с константой

$$M = \frac{\max\{1, \frac{1}{2\varepsilon}\}}{\min\{-2(\varepsilon + \lambda_\varepsilon)l^2, 1\}}.$$

Из априорной оценки (6) следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи от входных данных. $\square$

Список литературы/References

- [1] Block H., "Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples", *Ark. mat., astron., fys.*, **7**:13 (1912), 1–34.
- [2] Del Vecchio E., "Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_1(x, y) = 0$ ", *Mem. Real acad. cienc. Torino.*, **66** (1915), 1–41.
- [3] Del Vecchio E., "Sulle deux problems d'integration pour las equazioni paraboliques $Z_{xxx} - Z_y = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} = 0$ ", *Ark. mat., astron., fys.*, **11** (1916), 32–34.
- [4] Cattabriga L., "Potenziali di linea ed domino per equation nom paraboliche in olue variabili a caratteristiche multiple", *Rendi del Som. Mat. della Univ. di Padova.*, **3** (1961), 1–45.
- [5] Cattabriga L., "Un problema al kontorno per una equazione di ordine disparty", *Analli della scuola normale superior di pisa fis e mat.*, **3**:2 (1959), 163–169.
- [6] Шхагапсоев А. М., "Априорные оценки решения краевых задач для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками", *Известия КБНЦ РАН*, 2016, № 6(74), 96–101. [Shkhagapsoyev A. M., "Apriornyye otsenki resheniya krayevykh zadach dlya obobshchennogo uravneniya tret'yego poryadka s kratnymi kharakteristikami", *Izvestiya KBNTS RAN*, 2016, № 6(74), 96–101, (in Russian)].

- [7] Шхагапсоев А. М., “Априорная оценка задачи Каттабрига для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016, № 1(12), 66–71. [Shkhagapsoyev A. M., “Apriornaya otsenka zadachi Kattabriga dlya obobshchennogo uravneniya tret'yego poryadka s kratnymi kharakteristikami”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2016, № 1(12), 66–71, (in Russian)].
- [8] Шхагапсоев А. М., “Априорная оценка решения аналога второй краевой задачи для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2017, № 1(12), 66–71. [Shkhagapsoyev A. M., “Apriornaya otsenka resheniya analoga vtoroy krayevoy zadachi dlya obobshchennogo uravneniya tret'yego poryadka s kratnymi kharakteristikami”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2017, № 1(12), 66–71, (in Russian)].
- [9] Шхагапсоев А. М., “Априорная оценка решения краевой задачи с условием Самарского для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018, № 6, 208–213. [Shkhagapsoyev A. M., “Apriornaya otsenka resheniya krayevoy zadachi s usloviyem Samarskogo dlya obobshchennogo uravneniya tret'yego poryadka s kratnymi kharakteristikami”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2018, № 6, 208–213, (in Russian)].
- [10] Шхагапсоев А. М., “Априорные оценки решения нелокальных краевых задач с условием Самарского для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками”, *Известия КБНЦ РАН*, 2018, № 5, 89–99. [Shkhagapsoyev A. M., “Apriornnyye otsenki resheniya nelokal'nykh krayevykh zadach s usloviyem Samarskogo dlya obobshchennogo uravneniya tret'yego poryadka s kratnymi kharakteristikami”, *Izvestiya KBNTS RAN*, 2018, № 5, 89–99, (in Russian)].
- [11] Шхагапсоев А. М., “О единственности и существования обобщенного решения краевой задачи с условием самарского для уравнения третьего порядка со спектральным параметром”, *Евразийский союз ученых*, 2018, № 6(51), 43–47. [Shkhagapsoyev A. M., “O yedinstvennosti i sushchestvovaniya obobshchennogo resheniya krayevoy zadachi s usloviyem samarskogo dlya uravneniya tret'yego poryadka so spektral'nyy parametrom”, *Yevraziyskiy soyuz uchenykh*, 2018, № 6(51), 43–47, (in Russian)].
- [12] Caputo M., “Elasticita e Dissipazione”, *Bologna (in Italian)*, 1969.
- [13] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp., (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Block H. Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples // *Ark. mat., astron., fys.* 1912. vol. 7. issue 13. pp. 1–34.
- [2] Del Vecchio E. Sulle equazioni $Z_{xxx} - Z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} + \varphi_1(x, y) = 0$ // *Mem. Real acad. cienc. Torino.* 1915. vol. 66. pp. 1–41.
- [3] Del Vecchio E. Sulle deux problems d'integration pour las equazions paraboliques $Z_{xxx} - Z_y = 0$, $Z_{xxx} - Z_{yy} = 0$ // *Ark. mat., astron., fys.* 1916. vol. 11. pp. 32–34.
- [4] Cattabriga L. Potenzialli di linia edi domino per equation nom paraboliche in olue variabli a caratteristiche multiple // *Rendi del Som. Mat. della Univ. di Padova.* 1961. vol. 3. pp. 1–45.
- [5] Cattabriga L. Un problema al kontorno per una equazione di ordine disparty // *Analli della scuola normale superior di pisa fis e mat.* 1959. vol. 3. issue 2. pp. 163–169.
- [6] Шхагапсоев А. М. Априорные оценки решения краевых задач для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // *Известия КБНЦ РАН.* 2016. №6(74). С. 96–101.
- [7] Шхагапсоев А. М. Априорная оценка задачи Каттабрига для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2016. № 4-1(12). С. 66–71.

- [8] Шхагапсоев А. М. Априорная оценка решения аналога второй краевой задачи для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. №3(19). С. 20–24.
- [9] Шхагапсоев А. М. Априорная оценка решения краевой задачи с условием Самарского для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. №4(24). С. 208–213
- [10] Шхагапсоев А. М. Априорные оценки решения нелокальных краевых задач с условием Самарского для обобщенного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Известия КБНЦ РАН. 2018. №5. С. 89–99.
- [11] Шхагапсоев А. М. О единственности и существования обобщенного решения краевой задачи с условием самарского для уравнения третьего порядка со спектральным параметром // Евразийский союз ученых. 2018. №6(51). С. 43–47.
- [12] Caputo M. Elasticita e Dissipazione. Bologna (in Italian). 1969
- [13] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

Для цитирования: Шхагапсоев А. М. Априорная оценка обобщенной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка с дробной производной Капуто по времени // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 29. № 4. С. 35-40. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-35-40

For citation: Shkhagapsoev A. M. A priori estimation of a generalized nonlocal boundary value problem for a third order equation with a fractional time Caputo derivative, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2019, **29**: 4, 35-40. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-35-40

Поступила в редакцию / Original article submitted: 30.10.2019

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-35-40

MSC 35M13

A PRIORI ESTIMATION OF A GENERALIZED NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THRID ORDER EQUATION WITH A FRACTIONAL TIME CAPUTO DERIVATIVE

A. M. Shkhagapsoev

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, 360000,
KBR, Nalchik, st. Shortanova 89a

E-mail: sh2ps@yandex.ru

A boundary value problem for a third-order parabolic equation with a fractional Caputo derivative is considered. A priori estimation of the solution of a generalized nonlocal boundary value problem for an equation with multiple characteristics with a fractional Caputo derivative in time is obtained by the method of energy inequalities.

Key words: a priori estimation, nonlocal boundary value problem, equation with multiple characteristics, method of energy integrals, Caputo fractional derivative

© Shkhagapsoev A. M., 2019