УДК 517.9

ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

Ф. М. Лосанова

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000,

г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: losanovaf@gmail.com

Для уравнения дробной диффузии исследуется нелокальная краевая задача первого рода, нелокальность которой проявляется в том, что в граничном условии задается линейная комбинация значений искомой функции. В работе доказана теорема о существовании и единственности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: нелокальная краевая задача, дробная производная Римана–Лиувилля, уравнение дробной диффузии, функция типа Райта

© Лосанова Ф. М., 2019

MSC 34L99

LOCAL DISPLACEMENT PROBLEM FOR EQUATION OF FRACTIONAL DIFFUSION

F. M. Losanova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik,

Shortanova st., 89A, Russia

E-mail: losanovaf@gmail.com

For the fractional diffusion equation, we study a nonlocal boundary value problem of the first kind. The problem nonlocality is manifested in the fact that a linear combination of the values of the desired function is specified in the boundary condition. The theorem on the existence and uniqueness of a solution to the problem is proved.

Key words: nonlocal boundary value problem, Riemann-Liouville fractional derivative, fractional diffusion equation, Wright type function.

© Losanova F. M., 2019

Введение

В области $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассматривается уравнение дробной диффузии

$$u_{xx}(x, t) - D_{0t}^{\alpha} u(x, \eta) = f(x, t), \quad (1)$$

удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} D_{0t}^{\alpha-1} u(x, t) = \tau(x), \quad 0 < x < l, \quad (2)$$

$$u(0, t) + \sum_{i=0}^k a_i u(x_i, t) = \varphi(t), \quad 0 < t < T, \quad (3)$$

$$u(l, t) = \psi(t), \quad 0 < t < T \quad (4)$$

где D_{0t}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α , определяемый следующим образом [1]

$$D_{0t}^{\alpha} u(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{u(\eta)}{(t-\eta)^{\alpha+1}} d\eta, & \alpha < 0, \\ u(t), & \alpha = 0, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^p D_{0t}^{\alpha-p} u(\eta), & p-1 < \alpha \leq p, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, $0 < \alpha < 1$, a_i – некоторые произвольные постоянные, $\tau(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – заданные непрерывные функции.

При изучении ряда прикладных задач возникают различные математические модели, которые приводят к необходимости решения нелокальных краевых задач. Интерес к которым впервые проявили в своей работе А.В. Бицадзе и А.А. Самарский [2]. Уравнение (1) же возникает при математическом моделировании динамики численности популяции с учетом различных миграционных процессов [3].

Перечислим некоторые работы, посвященные уравнению (1). В работе [4] исследовалась задача Коши для уравнения диффузии дробного порядка ($0 < \alpha < 1$) с регуляризованной дробной производной и эллиптическим оператором с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных.

Для построения фундаментальных решений диффузионных и диффузионно-волновых уравнений дробного порядка с производными Капуто и Римана-Лиувилля в работе [5] были использованы преобразование Лапласа и преобразование Фурье.

Диффузионно-волновое уравнение было исследовано в работе [6] методами группового анализа, а в работе [7] методом разделения переменных.

В работах [8] и [9] методом редукции к системе уравнений меньшего порядка решена задача Коши и первая краевая задача для дробного уравнения диффузии вида (1). Затем методом функции Грина построены решения основных краевых задач в прямоугольной области и решена задача Коши для диффузионно-волнового уравнения с помощью фундаментального решения.

В работе [10] строится решение внутреннекраевой задачи с нелокальным смещением для уравнения дробной диффузии в прямоугольной области, а в работе строится решение нелокальной краевой задачи с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе.

Для уравнения (1) были рассмотрены и другие задачи, полный список работ можно найти к примеру в [11], [12], [18].

Далее обратим внимание на условие (3). В 1979 году А.М. Нахушевым была предложена задача для уравнения теплопроводности с внутреннекраевыми условиями вида (3), которое возникает при численной реализации на ЭВМ задачи Самарского [1].

Фундаментальную роль в развитие методов исследования нелокальных краевых и внутреннекраевых задач с условием (3) сыграли работы В.А. Ильина и Е.И. Моисеева [14], [15], где была изучена нелокальная краевая задача первого рода в дифференциальной и разностной трактовках. Нелокальность первого рода проявляется вследствие того, что в граничном условии задается линейная комбинация значений искомой функции. Наиболее подробный анализ работ с условием (3) был проведен в Главе 2 [1].

Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω назовем функцию $u = u(x, t)$ из класса $D_{0t}^{\alpha-1}u(x, \eta) \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx}, D_{0t}^{\alpha}u(x, \eta) \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x, t) \in \Omega$.

Задача. Найти регулярное решение $u(x, t)$ уравнения (1) в области Ω , удовлетворяющее условиям (2)–(4).

Интегральное уравнение

Пусть $u(x, t)$ – является регулярным решением уравнения (1). Тогда для нахождения решения задачи (1)–(4), воспользуемся представлением решения первой краевой задачи для уравнения (1), которое выписывается в виде [12, стр. 99]

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_0^t u(0, \eta) G_{\xi}(x, t, 0, \eta) d\eta - \int_0^t \psi(\eta) G_{\xi}(x, t, l, \eta) d\eta + \\ & + \int_0^l \tau(\eta) G(x, t, \xi, 0) d\xi - \int_0^t \int_0^l f(\xi, \eta) G(x, t, \xi, \eta) d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} G(x, t, \xi, \eta) = & \frac{(t - \eta)^{\beta-1}}{2} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|x - \xi + 2nl|}{(t - \eta)^{\beta}} \right) - e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|x + \xi + 2nl|}{(t - \eta)^{\beta}} \right) \right] \end{aligned}$$

— функция Грина первой краевой задачи, $\beta = \alpha/2$,

$$e_{1,\rho}^{1,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\mu - \rho n)}$$

— функция Райта [12, стр. 23].

Удовлетворив функцию (5) условию (3), после несложных преобразований получим

$$u(0, t) + \int_0^t u(0, \eta) K(t, \eta) d\eta = F(t), \quad (6)$$

где

$$K(t, \eta) = \sum_0^k a_i G_\xi(x, t, 0, \eta), \quad (7)$$

– ядро интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (6),

$$G_\xi(x, t, 0, \eta) = (t - \eta)^{-1} \left[e_{1, \beta}^{1, 0} \left(-\frac{x}{(t - \eta)^\beta} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} e_{1, \beta}^{1, 0} \left(-\frac{|x - 2nl|}{(t - \eta)^\beta} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} e_{1, \beta}^{1, 0} \left(-\frac{(x + 2nl)}{(t - \eta)^\beta} \right) \right],$$

а

$$F(t) = \varphi(t) + \int_0^t \psi(t) K(t, \eta) d\eta - \int_0^l \tau(\xi) K(t, \eta) d\xi + \int_0^t \int_0^l f(\xi, \eta) K(t, \eta) d\xi d\eta$$

– правая часть уравнения (6).

Далее исследуем ядро (7).

Используя оценку для функции Райта [12, стр. 27] и учитывая, что $e_{1, \beta}^{1, \beta}(z)$ – положительная функция, получим

$$|K(t, \eta)| \leq \sum_0^k |a_i| |G_\xi(x, t, 0, \eta)| \leq C(t - \eta)^{\beta\theta - 1}, \quad (8)$$

где $C = C(\theta, a_i, \beta)$ – константа, не зависящая от x , причем $\theta \in (1, 2]$.

Основной результат

Пусть $t^{1-\alpha}u(0, t) \in C[0, t)$. Тогда решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (6) можно выписать в виде [см. 17]

$$u(0, t) = F(t) - \int_0^t F(\eta) R(t, \eta) d\eta, \quad (9)$$

где $R(t, \eta)$ – резольвента ядра $K(t, \eta)$ и имеет вид

$$R(t, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k K_{k+1}(t, \eta),$$

$$K_1(t, \eta) = K(t, \eta), \quad K_n(t, \eta) = \int_\eta^t K(t, s) K_{n-1}(s, \eta) ds.$$

В результате, пользуясь представлением (5), решение задачи (1)–(4) может быть выписано в виде

$$\begin{aligned}
 u(x, t) = & \int_0^t \left[F(t) - \int_0^t F(\eta) R(t, \eta) d\eta \right] G_\xi(x, t, 0, \eta) d\eta - \\
 & - \int_0^t \varphi(\eta) G_\xi(x, t, l, \eta) d\eta + \\
 & + \int_0^l \tau(\eta) G(x, t, \xi, 0) d\xi - \int_0^t \int_0^l f(\xi, \eta) G(x, t, \xi, \eta) d\xi d\eta.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Сформулируем теорему.

Теорема. Пусть $t^{1-\alpha}\psi(t), t^{1-\alpha}\varphi(t) \in C[0, T)$, $\tau(x) \in C[0, l]$, $t^{1-\alpha}f(x, t) \in C(\overline{\Omega})$, $f(x, t)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменной x . Тогда решение задачи (2)–(4) для уравнения (1) существует, единственно и представимо в виде (10).

Доказательство.

Единственность решения задачи (1)–(4) следует из единственности решения интегрального уравнения (6) и представления (10).

Учитывая условия, наложенные на $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $u(0, t)$ доказательство того, что функция (10) является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (2)–(4) проводится также как и в работе [9]. $\square$

Список литературы/References

- [1] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высш. шк., М., 1995, 301 с. [Nakhushhev A. M., *Uravneniya matematicheskoy biologii*, Vyssh. shk., M., 1995, 301 pp., (in Russian)].
- [2] Бицадзе А. В., Самарский А. А., “О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач”, *Докл. АН СССР*, **185**:4 (1969), 739–740. [Bitsadze A. V., Samarskiy A. A., “O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh krayevykh zadach”, *Dokl. AN SSSR*, **185**:4 (1969), 739–740, (in Russian)].
- [3] Лосанова Ф. М., “Задача с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015, № 2(11), 17–21. [Losanova F. M., “Zadacha s usloviyem Samarskogo dlya uravneniya drobnoy diffuzii v polupolose”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2015, № 2(11), 17–21, (in Russian)].
- [4] Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д., “Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка”, *Докл. РАН*, **394**:2 (2004), 159–161. [Kochubey A. N., Eydel'man S. D., “Zadacha Koshi dlya evolyutsionnykh uravneniy drobnogo poriyadka”, *Dokl. RAN*, **394**:2 (2004), 159–161, (in Russian)].
- [5] Mainardi F., “Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena”, *Chaos Solitons Fractals*, 1996, № 7:9, 1461–1477.
- [6] Luchko Yu., Gorenflo R., “Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **1**:1 (1998), 63–78.
- [7] Андреев А. А., Еремин А. С., “Краевая задача для уравнения диффузии с дробной производной по времени”, *Математическое моделирование и краевые задачи*, Тр. двенадцатой межвуз. конф.. Т. 3, СамГТУ, Самара, 2004, 3–9. [Andreyev A. A., Yeremin A. S., “Krayevaya zadacha dlya uravneniya diffuzii s drobnoy proizvodnoy po vremeni”, *Matematicheskoye modelirovaniye i krayevyye zadachi*, Tr. dvenadtsatoy mezhvuz. konf.. V. 3, SamGTU, Samara, 2004, 3–9, (in Russian)].

- [8] Псху А. В., “Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина”, *Дифференциальные уравнения*, **39:10** (2003), 1430–1433. [Pskhu A. V., “Resheniye krayevykh zadach dlya uravneniya diffuzii drobnogo poryadka metodom funktsii Grina”, *Differentsial’nyye uravneniya*, **39:10** (2003), 1430–1433, (in Russian)].
- [9] Псху А. В., “Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка”, *Дифференциальные уравнения*, **39:9** (2003), 1286–1289. [Pskhu A. V., “Resheniye pervoy krayevoy zadachi dlya uravneniya diffuzii drobnogo poryadka”, *Differentsial’nyye uravneniya*, **39:9** (2003), 1286–1289, (in Russian)].
- [10] Лосанова Ф. М., “Задача с нелокальным смещением для уравнения дробной диффузии”, *Вестник Самарского университета. Естественная серия*, **24:3** (2018), 35–40. [Losanova F. M., “Zadacha s nelokal’nym smeshcheniyem dlya uravneniya drobnoy diffuzii”, *Vestnik Samarskogo universiteta. Yestestvennonauchnaya seriya*, **24:3** (2018), 35–40, (in Russian)].
- [11] Нахушев А. М., *Задачи со смещением для уравнения в частных производных*, Наука, М., 2006, 287 с. [Nakhushhev A. M., *Zadachi so smeshcheniyem dlya uravneniya v chastnykh proizvodnykh*, Nauka, M., 2006, 287 pp., (in Russian)].
- [12] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pskhu A. V., *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka*, Nauka, M., 2005, 199 pp., (in Russian)].
- [13] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya*, Nauka i tekhnika, Minsk, 1987, 688 pp., (in Russian)].
- [14] Ильин В. А., Моисеев Е. И., “Нелокальная краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках”, *Докл. АН СССР*, **291:3** (1986), 534–538. [Il’in V. A., Moiseyev Ye. I., “Nelokal’naya krayevaya zadacha dlya operatora Shturma-Liuvillya v differentsial’noy i raznostnoy traktovkakh”, *Dokl. AN SSSR*, **291:3** (1986), 534–538, (in Russian)].
- [15] Ильин В. А., Моисеев Е. И., “Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма-Лиувилля”, *Дифференциальные уравнения*, **23:8** (1987), 1422–1431. [Il’in V. A., Moiseyev Ye. I., “Nelokal’naya krayevaya zadacha vtorogo roda dlya operatora Shturma-Liuvillya”, *Differentsial’nyye uravneniya*, **23:8** (1987), 1422–1431, (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
- [2] Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. №4. С. 739–740.
- [3] Лосанова Ф. М. Задача с условием Самарского для уравнения дробной диффузии в полуполосе // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. №2(11). С. 17–21.
- [4] Кочубей А. Н., Эйдельман С. Д. Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Докл. РАН. 2004. Т. 394. №2. С. 159–161.
- [5] Mainardi F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // Chaos Solitons Fractals. 1996. vol. 9. no. 7. pp. 1461–1477.
- [6] Luchko Yu., Gorenflo R. Scale-invariant solutions of a partial differential equation of fractional order // Fract. Calc. Appl. Anal. 1998. vol. 1. no. 1. pp. 63–78.
- [7] Андреев А. А., Еремин А. С. Краевая задача для уравнения диффузии с дробной производной по времени // Математическое моделирование и краевые задачи. Тр. двенадцатой межвуз. конф. Ч. 3. СамГТУ. Самара. 2004. С. 3–9.
- [8] Псху А. В. Решение краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка методом функции Грина // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. №10. С. 1430–1433.
- [9] Псху А. В. Решение первой краевой задачи для уравнения диффузии дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. №9. С. 1286–1289.

- [10] Лосанова Ф. М. Задача с нелокальным смещением для уравнения дробной диффузии // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. №3. С. 35–40.
- [11] Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнения в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с.
- [12] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.
- [13] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
- [14] Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291. №3. С. 534–538.
- [15] Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23. №. 8. С. 1422–1431.

Для цитирования: Лосанова Ф. М. Задача с локальным смещением для уравнения дробной диффузии // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 29. № 4. С. 28-34. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-28-34

For citation: Losanova F. M. Local displacement problem for equation of fractional diffusion, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2019, **29**: 4, 28-34. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-28-34

Поступила в редакцию / Original article submitted: 28.11.2019