МАТЕМАТИКА

УДК 517.984.5

ЗАДАЧА ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

А. Х. Аттаев

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000,
г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А

E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

В работе изучается задача граничного управления для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка. Установлены необходимые и достаточные условия управляемости данными Коши за минимальный промежуток времени. Граничные управления предъявлены в явном аналитическом виде.

Ключевые слова: управление распределенными системами, вырождающиеся гиперболические уравнения, характеристики уравнения, данные Коши, регулярное решение, задача граничного управления.

© Аттаев А. Х., 2019

MATHEMATICS

MSC 35L10

BOUNDARY CONTROL PROBLEM FOR ONE DEGENERATE HIBERBOLIC EQUATION

Attaev A. Kh.

Institute of Applied Mathematics and Automation, 89A Shortanova St., Nalchik,
360000, Russia

E-mail: attaev.anatoly@yandex.ru

The paper studies the boundary control problem for a degenerate second-order hyperbolic equation. Necessary and sufficient conditions are established for minimal time controllability over Cauchy data. Boundary controls are presented in an explicit analytical form.

Key words: distributed system control, degenerate hyperbolic equations, equation characteristics, data Cauchy, regular solution, boundary control problem.

© Attaev, A. Kh., 2019

Введение

Задачи управления системами с распределенными параметрами важны и интересны, потому что возникают в самых различных областях современной науки. Только лишь математическое описание полей тех или иных процессов, которые возникают в физике, биологии и в других родственных им наукам, является недостаточным. Требуется эффективно управлять этими полями и устанавливать принципы управления ими. Помимо чисто научного интереса проблема управления распределенными системами имеет большое число практических приложений как в различных областях промышленности, так и в отдельных технических задачах. Конкретные примеры задач такого рода, а также обширная библиография работ посвященных этой тематике содержится в монографии [1].

Здесь отметим лишь некоторые из них [2]- [6]. Одно из направлений теории управления системами с распределенными параметрами изучает управление одномерными пространственно распределенными объектами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных гиперболического типа. Активный интерес к этим задачам был возобновлен в 1999 году в связи с выходом работы [7]. В частности, в этой работе авторами в терминах регулярного решения для одномерного волнового уравнения $u_{xx} - u_{tt} = 0$ были представлены в явном виде граничные управления $\mu(t) = u(0, t)$ и $\nu(t) = u(l, t)$ переводящие систему из заданного начального состояния $\{\varphi(x) = u(x, 0), \psi(x) = u_t(x, 0)\}$ в заданное финальное состояние $\{\varphi_1(x) = u(x, T), \psi_1(x) = u_t(x, T)\}$, и установлены необходимые и достаточные условия на эти начальные и финальные функции. Причем минимальный промежуток времени в течение которого это управление можно осуществить равен l .

Аналогичные результаты для граничного управления процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией были получены в работах [8], [9]. Только в этом случае минимальный промежуток времени в течение которого это управление однозначно осуществимо равно $2l$. Задача граничного управления смещением на одном конце и закрепленном втором конце процессом, описываемым телеграфным уравнением исследована в работе [10]. Задача граничного управления смещением на одном конце при свободном втором для телеграфного уравнения с переменными коэффициентами изучалась в работе [11]. Следует отметить, что минимальный порог управляемости на одном конце для телеграфного уравнения как и для уравнения колебания струны равен $2l$. Задачи граничного управления для нагруженного уравнения колебания струны исследованы в работах [12], [13].

В настоящей работе изучается вопрос о граничном управлении процессом, который описывается вырождающимся гиперболическим уравнением. Ниже везде изложение будет вестись в терминах регулярного решения.

Постановка задачи

Пусть некоторый процесс описывается уравнением вида

$$y^m u_{yy} - u_{xx} + \frac{m}{2} y^{m-1} u_y = 0 \quad (1)$$

где $0 < m < 2$.

Это уравнение относится к классу вырождающихся гиперболических уравнений второго рода. Известно [14], что на линии параболического вырождения $y = 0$ данные Коши задаются следующим образом

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{\frac{m}{2}} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \psi_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

где l - заданное действительное число.

Итак, наша задача состоит в том, чтобы найти такие граничные управления

$$u(0, y) = \mu(y), \quad u(l, y) = \nu(y), \quad (4)$$

которые за минимальный промежуток времени переводили бы процесс из заданного начального состояния (2), (3) в наперед заданное финальное состояние

$$u(x, T) = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$\lim_{y \rightarrow T} y^{\frac{m}{2}} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (6)$$

Основная часть

Нетрудно убедиться в том, что в характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}$$

уравнение (1) приобретает вид $v_{\xi\eta} = 0$ и, следовательно, его общее решение представимо в виде

$$u(x, y) = f\left(x - \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}\right) + g\left(x + \frac{2}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}\right), \quad (7)$$

где f, g - произвольные функции.

Обозначим через f_0 и g_0 функции f и g , область определения которых представляет собой интервал $(0, l)$, через f_1 и g_1 функции f и g , область определения которых представляет соответственно множества $(-l, 0)$ и $(l, 2l)$, а через f_2 и g_2 функции f и g , область определения которых представляет соответственно множества $(-2l, -l)$ и $(2l, 3l)$.

Случай когда $T = \left(\frac{2-m}{2}l\right)^{\frac{2}{2-m}}$.

Удовлетворяя (7) условиям (2), (3), получим

$$f_0(x) + g_0(x) = \varphi_0(x),$$

$$f'_0(x) + g'_0(x) = \psi_0(x),$$

откуда следует, что

$$f_0(x) = \frac{\varphi_0(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x \psi_0(t) dt - c_0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8)$$

$$g_0(x) = \frac{\varphi_0(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \psi_0(t) dt + c_0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (9)$$

Аналогично, удовлетворяя (7) условиям (5), (6) получим, что

$$f_1(x-l) = \frac{\varphi_1(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_l^x \psi_1(t) dt - c_1, \quad 0 < x < l, \quad (10)$$

$$g_1(x+l) = \frac{\varphi_1(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_l^x \psi_1(t) dt + c_1, \quad 0 < x < l. \quad (11)$$

Удовлетворяя (7) условиям (4) и заменяя y на $\left(\frac{2-m}{2}x\right)^{\frac{2}{2-m}}$, получим

$$\mu \left[\left(\frac{2-m}{2} x \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = f_1(-x) + g_0(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (12)$$

$$\nu \left[\left(\frac{2-m}{2} x \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = f_0(l-x) + g_1(l+x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (13)$$

Подставляя в (12) и (13) выражения для f_0 , g_0 , f_1 и g_1 , вычисляемые по формулам (8)-(11) соответственно и, учитывая условия согласования $\mu(0) = \varphi_0(0)$, $\nu(0) = \varphi_0(l)$ (непрерывности $f_0(0) = f_1(0)$ и $g_0(l) = g_1(l)$), окончательно получим

$$\begin{aligned} \mu \left[\left(\frac{2-m}{2} x \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] &= \frac{\varphi_1(l-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_{l-x}^l \psi_1(t) dt - \frac{\varphi_1(l)}{2} + \\ &+ \frac{\varphi_0(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \psi_0(t) dt + \frac{\varphi_0(0)}{2}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \nu \left[\left(\frac{2-m}{2} x \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] &= \frac{\varphi_1(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \psi_1(t) dt - \frac{\varphi_1(0)}{2} + \\ &+ \frac{\varphi_0(l-x)}{2} + \frac{1}{2} \int_{l-x}^l \psi_0(t) dt + \frac{\varphi_0(l)}{2}. \end{aligned} \quad (15)$$

В силу предположения о регулярности решения задачи Коши в области $\Omega = \left\{ (x, y) : 0 < x < l, 0 < y < \left(\frac{2-m}{2} l \right)^{\frac{2}{2-m}} \right\}$ с данными (2), (3) и (5), (6) следует, что

$$\begin{aligned} f'_0(0) &= f'_1(0), \quad g'_0(l) = g'_1(l), \\ f''_0(0) &= f''_1(0), \quad g''_0(l) = g''_1(l), \\ \mu \left[\left(\frac{2-m}{2} l \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] &= \varphi_1(0), \quad \nu \left[\left(\frac{2-m}{2} l \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = \varphi_1(l). \end{aligned}$$

Удовлетворяя соотношения (8) - (11), (14), (15), вышеперечисленным условиям, получаем

$$\varphi_0'(0) - \psi_0(0) - \varphi_1'(l) + \psi_1(l) = 0, \quad (16)$$

$$\varphi_0''(0) - \psi_0'(0) - \varphi_1''(l) + \psi_1'(l) = 0, \quad (17)$$

$$\varphi_0'(0) + \psi_0(0) - \varphi_1'(0) - \psi_1(0) = 0, \quad (18)$$

$$\varphi_0''(0) + \psi_0'(0) - \varphi_1''(0) - \psi_1'(0) = 0, \quad (19)$$

$$\varphi_0(0) + \varphi_0(l) + \int_0^l \psi_0(t)dt - \varphi_1(0) - \varphi_1(l) + \int_0^l \psi_1(t)dt = 0. \quad (20)$$

Очевидно, что условия (16)-(20) являются необходимыми и достаточными для существования $\mu(x)$ и $\nu(x)$, которые однозначно определяются по формулам (14) и (15) соответственно.

Случай $T < \left(\frac{2-m}{2}l\right)^{\frac{2}{2-m}}$.

В силу монотонности функции $T = \left(\frac{2-m}{2}x\right)^{\frac{2}{2-m}}$, очевидно, что $T = \left[\frac{2-m}{2}(l-x_0)\right]^{\frac{2}{2-m}} < \left(\frac{2-m}{2}l\right)^{\frac{2}{2-m}}$, $x_0 \in (0, l)$. Для этого значения T , формулы (10), (11) переписутся в виде

$$f_1(x-l+x_0) = \frac{\varphi_1(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_l^x \psi_1(t)dt - c_1, \quad (21)$$

$$g_1(x+l-x_0) = \frac{\varphi_1(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_l^x \psi_1(t)dt + c_1. \quad (22)$$

Если $0 < \left[\frac{2-m}{2}(l-x_0)\right]^{\frac{2}{2-m}} < \left(\frac{2-m}{2}l\right)^{\frac{2}{2-m}}$, что соответствует тому, что $0 < x_0 < l$, то из (21) и (22) непосредственно следует следующие соотношения

$$f_1(x-l+x_0) = f_0(x-l+x_0), \quad x \in (l-x_0, l),$$

$$g_1(x+l-x_0) = g_0(x+l-x_0), \quad x \in (0, x_0).$$

Рассмотрим два случая, а именно:

1. $0 < T < \left(\frac{2-m}{4}l\right)^{\frac{2}{2-m}}$, что соответствует тому, что $\frac{l}{2} < x_0 < l$.

2. $\left(\frac{2-m}{4}l\right)^{\frac{2}{2-m}} < T < \left(\frac{2-m}{2}l\right)^{\frac{2}{2-m}}$, что соответствует тому, что $0 < x_0 < \frac{l}{2}$, где $\left(\frac{2-m}{4}l\right)^{\frac{2}{2-m}}$ есть ордината точки пересечения характеристик $x - \frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}} = 0$ и $x + \frac{2}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}} = l$ уравнения (1).

В первом случае так как $\frac{l}{2} < x_0 < l$, то $x_0 > l - x_0$, а это означает, что данные Коши при $y = 0$ нельзя задавать произвольно ни на каком отрезке конечной длины принадлежащем интервалу $(0, l)$. Во втором случае имеет место принцип частичной управляемости. Так как в этом случае $0 < x_0 < \frac{l}{2}$, то $x_0 < l - x_0$ и поэтому данными Коши задаваемыми при $y = 0$ на отрезке $[x_0, l - x_0]$ можно однозначно управлять, а на отрезках $[0, x_0]$ и $[l - x_0, l]$ управление ими невозможно.

Нетрудно заметить, что минимальное время управляемости данными Коши зависит как от l так и от m . В зависимости от значений которые они принимают время T может быть больше, меньше или равно l . Например, при $m = 1$, $T = \frac{l^2}{4}$. При $l < 4$ значение $T < l$, при $l = 4$ значение $T = 4$, а при $l > 4$ значение $T > l$.

Случай с закрепленным концом.

Пусть теперь условия (4) имеют вид

$$u(0, y) = \mu(y), \quad u(l, y) = 0. \quad (23)$$

Для однозначного перевода нашей системы из заданного начального состояния (2), (3) в наперед заданное финальное состояние (5), (6) времени $T = \left(\frac{2-m}{2}l\right)^{\frac{2}{2-m}}$ не хватит так как из (15) непосредственно следует, что

$$\varphi_1'(x) + \psi_1(x) - \varphi_0'(l-x) + \psi_0(l-x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

А это означает, что данные Коши (2), (3) задавать произвольно нельзя.

Случай $T = \left[(2-m)l\right]^{\frac{2}{2-m}}$.

Выражения (10)-(13) при этом значении времени, в наших обозначениях для функций f и g переписутся соответственно в виде

$$f_2(x-2l) = \frac{\varphi_1(x)}{2} - \frac{1}{2} \int_l^x \psi_1(t) dt - c_1, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (24)$$

$$g_2(x+2l) = \frac{\varphi_1(x)}{2} + \frac{1}{2} \int_l^x \psi_1(t) dt + c_1, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (25)$$

$$\mu \left[\left(\frac{2-m}{2} x \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = f_1(-x) + g_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (26)$$

$$\mu \left[\left(\frac{2-m}{2} x \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = f_2(-x) + g_1(x), \quad l \leq x \leq 2l, \quad (27)$$

$$f_0(l-x) + g_1(l+x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (28)$$

$$f_1(l-x) + g_2(l+x) = 0, \quad l \leq x \leq 2l. \quad (29)$$

Учитывая (28) и (29) из (26) и (27) соответственно получаем

$$\mu \left[\left(\frac{2-m}{2} x \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = g_0(x) - g_2(2l+x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\mu \left[\left(\frac{2-m}{2} x \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = f_2(-x) - f_0(2l-x), \quad l \leq x \leq 2l.$$

Условия согласования $\mu(0) = \varphi_0(0)$ и $\mu \left\{ \left[(2-m)l \right]^{\frac{2}{2-m}} \right\} = \varphi_1(0)$ позволяют записать последние две формулы в окончательном виде

$$\mu \left[\left(\frac{2-m}{2} x \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = \frac{\varphi_0(x)}{2} + \frac{\varphi_0(0)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x \psi_0(t) dt -$$

$$-\frac{\varphi_1(x)}{2} + \frac{\varphi_1(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^x \psi_1(t) dt, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (30)$$

$$\mu \left[\left(\frac{2-m}{2} x \right)^{\frac{2}{2-m}} \right] = \frac{\varphi_1(2l-x)}{2} + \frac{\varphi_1(0)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{2l-x} \psi_1(t) dt -$$

$$-\frac{\varphi_0(2l-x)}{2} + \frac{\varphi_0(0)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2l-x} \psi_0(t) dt, \quad l \leq x \leq 2l. \quad (31)$$

Выражая (8) - (11), (24), (25), с учетом (26), (27) и в предположении о регулярности решения задачи Коши в области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l, 0 < y < [(2-m)l]^{\frac{2}{2-m}}\}$ позволяют записать следующие соотношения

$$f'_0(0) = g'_2(2l), \quad f''_0(0) = -g''_2(2l),$$

$$g'_0(l) = f'_0(l), \quad g''_0(l) = -f''_0(l),$$

$$f'_2(-l) = g'_2(2l), \quad f''_2(-l) = -g''_2(2l).$$

Отсюда после несложных вычислений получаем

$$\varphi'_0(0) - \psi_0(0) - \varphi'_1(0) - \psi_1(0) = 0, \quad (32)$$

$$\varphi''_0(0) - \psi'_0(0) - \varphi''_1(0) - \psi'_1(0) = 0, \quad (33)$$

$$\varphi''_0(0) = \psi_0(l) = \varphi'_1(l) = \psi_1(l) = 0. \quad (34)$$

Итак, мы показали, что в случае с закрепленным концом минимальное время T при котором функция $\mu(x)$ однозначно определяется по формулам (30), (31) равно $[(2-m)l]^{\frac{2}{2-m}}$. Необходимыми и достаточными условиями существования этих представлений являются условия (32)-(34). Как и в случае со свободными концами легко показать, что в случае, когда $0 < T < \left(\frac{2-m}{2}l\right)^{\frac{2}{2-m}}$ данные Коши задавать произвольно нельзя на отрезке $[0, l]$, а в случае $\left(\frac{2-m}{2}l\right)^{\frac{2}{2-m}} < T < [(2-m)l]^{\frac{2}{2-m}}$ имеет место принцип частичной управляемости.

В заключении хочется отметить, что это сообщение в большой степени посвящено подтверждению тезиса о том, что управляемость данными Коши для гиперболических уравнений непосредственно зависит от характеристик. Минимальное время T управляемости данными Коши, которые задаются на отрезке $[a, b]$, есть ордината точки пересечения характеристики гиперболического уравнения, выходящей из точки $(a, 0)$ с прямой $x = b$ или характеристики выходящей из точки $(b, 0)$ с прямой $x = a$.

Список литературы/References

- [1] Бутковский А.Х., *Методы управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1975, 568 с. [Butkovskij A.H., *Metody upravleniya sistemami s raspredeleennyimi parametrami*, Nauka, M., 1975, 568 pp., (in Russian)].
- [2] Бутковский А.Х., *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1965, 474 с. [Butkovskij A.H., *Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredeleennyimi parametrami*, Nauka, M., 1965, 474 pp., (in Russian)].
- [3] Лионс Ж.Л., *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972, 415 с. [Lions ZH.L., *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisываемыми уравнениями с частными производными*, Mir, M., 1972, 415 pp., (in Russian)].
- [4] Butkovskii A. G., Poltavskii L. N., "Optimal control of two-dimensional distributed oscillating system", *Avtomat. i Telemekh.*, 1996, № 4, 32–41.
- [5] Butkovskii A. G., Poltavskii L. N., "Optimal control of wave processes", *Avtomat. i Telemekh.*, 1966, № 9, 48–53.
- [6] Vasil'ev F. P., "On duality in linear problems of control and observation", *Differ. Equ.*, **11**:31 (1995), 1893–1900.
- [7] Ильин В.А., Тихомиров В.В., "Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и задача о полном успокоении колебательного процесса", *Дифференц. уравнения*, **35**:5 (1999), 692–704. [Il'in V.A., Tikhomirov V.V., "The wave equation with boundary control at two ends and the problem of the complete damping of a vibration process", *Differ. Equ.*, **35**:5 (1999), 697–708, (in Russian)].
- [8] Ильин В.А., "Граничное управление процессом колебаний на одном конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией", *Дифференц. уравнения*, **36**:12 (2000), 1670–1686. [Il'in V.A., "Boundary Control of Oscillations at One Endpoint with the Other Endpoint Fixed in Terms of a Finite-Energy Generalized Solution of the Wave Equation", *Differ. Equ.*, **36**:12 (2000), 1832–1849, (in Russian)].
- [9] Ильин В.А., "Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени", *Дифференц. уравнения*, **35**:11 (1999), 1517–1534. [Il'in V.A., "A wave equation with a bounded control on two ends for an arbitrary time interval", *Differ. Equ.*, **35**:11 (1999), 1532–1552, (in Russian)].
- [10] Ильин В.А., Моисеев Е.И., "О граничном управлении процессом, описываемым телеграфным уравнением", *Доклады Академии Наук*, **387**:5 (2002), 600–603. [Il'in V.A., Moiseev E.I., "Boundary control at one endpoint of a process described by a telegraph equation", *Dokl. Akad. Nauk*, **387**:5 (2002), 600–603, (in Russian)].
- [11] Абдукаримов М. Ф., Крицков Л. В., "Граничное управление смещением на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменными коэффициентами", *Доклады Академии Наук*, **450**:6 (2013), 640–643. [Abdukarimov M. F., Kritskov L. V., "Boundary control of the displacement at one end with the other end free for a process described by the telegraph equation with a variable coefficient", *Doklady Mathematics*, **87**:3 (2013), 351–353, (in Russian)].
- [12] Attaev A. Kh., "Boundary control by displacement at one and of string and the integral condition on the other", *International conference "Functional analysis in interdisciplinary applications (FAIA)*, 2017.
- [13] Attaev A.Х., "Задача граничного управления для существенно нагруженного уравнения колебания струны", *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, **13**:1 (2011), 30–35. [Attaev A.H., "Zadacha granichnogo kpravlениya dlya sushchestvenno nagruzhenного uravneniya kolebaniya struny", *Doklady Adygskoj (CHerkesskoj) Mezhdunarodnoy akademii nauk*, **13**:1 (2011), 30–35, (in Russian)].
- [14] Смирнов М.М., *Вырождающиеся гиперболические уравнения*, Вышэйшая школа, Минск, 1977, 160 с. [Smirnov M.M., *Vyrozhdayushchiesya giperbolicheskie uravneniya*, Vyshejshaya shkola, Minsk, 1977, 160 pp., (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Бутковский А.Х. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
- [2] Бутковский А.Х. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
- [3] Лионс Ж.Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 415 с.
- [4] Butkovskii A. G., Poltavskii L. N. Optimal control of two-dimensional distributed oscillating system // *Avtomat. i Telemekh.* 1996. no. 4. pp. 32–41.
- [5] Butkovskii A. G., Poltavskii L. N. Optimal control of wave processes // *Avtomat. i Telemekh.* 1966. no. 9. pp. 48–53.
- [6] Vasil'ev F. P. On duality in linear problems of control and observation // *Differ. Equ.* 1995. vol. 11. no. 31. pp. 1893–1900.
- [7] Ильин В.А., Тихомиров В.В. Волновое уравнение с граничным управлением на двух коньках и задача о полном успокоении колебательного процесса // *Дифференц. уравнения.* 1999. Т. 35. №5. С. 692–704.
- [8] Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на одном конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией // *Дифференц. уравнения.* 2000. Т. 36. №12. С. 1670–1686.
- [9] Ильин В.А. Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени // *Дифференц. уравнения.* 1999. Т. 35. № 11. С. 1517–1534.
- [10] Ильин В.А., Моисеев Е.И. О граничном управлении процессом, описываемым телеграфным уравнением // *Доклады Академии Наук.* 2002. Т. 387. №5. С. 600–603.
- [11] Абдукаримов М.Ф., Крицков Л.В. Граничное управление смещением на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменными коэффициентами // *Доклады Академии Наук.* 2013. Т. 450. №6. С. 640–643.
- [12] Attaev A. Kh. Boundary control by displacement at one end of string and the integral condition on the other // *International conference "Functional analysis in interdisciplinary applications (FAIA).* 2017. Astana
- [13] Аттаев А.Х. Задача граничного управления для существенно нагруженного уравнения колебания струны // *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.* 2011. Т. 13. №1. С. 30–35.
- [14] Смирнов М.М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск: Высшая школа, 1977. 160 с.

Для цитирования: Аттаев А.Х. Задача граничного управления для одного вырождающегося гиперболического уравнения // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2019. Т. 29. № 4. С. 19–27. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-19-27

For citation: Attaev A. Kh. Boundary control problem for one degenerate hiberbolic equation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2019, **29**: 4, 19–27. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-19-27

Поступила в редакцию / Original article submitted: 17.11.2019