Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 29. № 4. C. 98-109. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-98-109

ФИЗИКА

УДК 537.9

К ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

Московский авиационный институт, 125993,
г. Москва, Волоколамское шоссе, 4
E-mail: sglad51@mail.ru

В работе предложен аналитический способ описания физических свойств фрактальных металлических структур. Вычисления основаны на применении квазиклассического кинетического уравнения Больцмана и формально введенной операции дробного дифференцирования. В качестве примеров его приложения вычислены коэффициенты теплопроводности и проводимости металлического фрактала. Показано качественное отличие физических свойств фрактальных объектов от обычных гладких образцов.

Ключевые слова: квазиклассическое кинетическое уравнение, фрактал, дробное дифференцирование, проводимость, теплопроводность

Введение

Понятие фракталов, введенное в конце прошлого века Б.Мандельбротом [1-3], широко используется в различных областях науки и техники. В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании таких нелинейных процессов, как турбулентное течение жидкости и сложные процессы диффузии. Их роль важна в теории перколяции, при моделировании свойств пористых материалов и композитов. Еще один результат важного практического приложения фракталов – это, так называемые, фрактальные антенны, которые давно и успешно используются в различных системах связи и радиолокации.

Из многочисленных опытных и экспериментальных [4-7] данных хорошо известно о существенном отличии физических свойств фрактальных структур от аналогичных свойств гладких объектов. Подобное обстоятельство может рассматриваться как некоторый стимулирующий толчок, направленный в сторону разработки формального математического подхода, позволяющего находить связь между физическими свойствами фрактала и его геометрией.

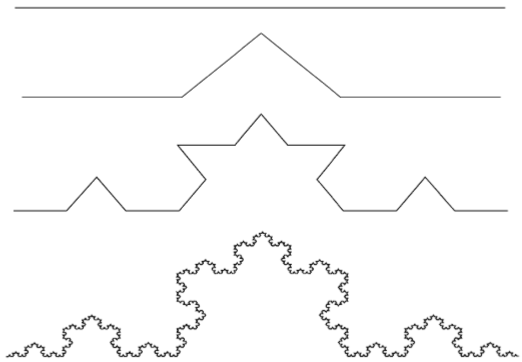

Рисунок. Первые этапы построения фрактальной кривой Коха

Из всего многообразия фрактальных структур, как наиболее показательные, можно выбрать, например, кривую Коха, ковер Серпинского, кривую Пеано и губку Менгера. Все они топологически одномерны (строго доказанный математический фактор [8-9]), который в излагаемой далее теории играет ключевую роль.

Принцип построения, скажем, кривой Коха иллюстрирует рисунок, когда из единичного отрезка (инициатора) «стирается» средняя треть и по определенному закону достраивается на каждом итерационном шаге. Степень «изломанности» всех подобных кривых определяется фрактальной размерностью Хаусдорфа [1-3] $d_F = \lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\ln N}{\ln\dfrac{1}{r}}$, где r - длина излома на n - м шаге построения, а N – их количество. Для исследуемых нами фрактальных кривых размерности будут $d_F = \dfrac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,2618$ - в случае кривой Коха, $d_F = \dfrac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,8928$ - если речь идет о ковре Серпинского, $d_F = \dfrac{\ln 9}{\ln 3} = 2$ - если это кривая Пеано и $d_F = \dfrac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,7268$ - для губки Менгера.

Дробное дифференцирование и мера

Поскольку фрактальная размерность d_F всегда больше топологической d_T [1-3] ($d_F > d_T$), то весьма удобно воспользоваться параметром фрактальности $\varepsilon = d_F - 1$, отражающий, с одной стороны, геометрию образца, а с другой – его можно рассматривать в качестве параметра операции дробного дифференцирования (см. работы [10-13]).

Саму процедуру дробного дифференцирования по координате удобно ввести по правилу, предложенному в свое время еще Фурье. В частности, как это было сделано в работе [10], запишем его в виде:

$$\hat{A}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(ik)^{1+\varepsilon} f(k)\exp(ikx)dk \qquad (1)$$

Поскольку операция $\hat{A}$ основана на разложении функции в интеграл Фурье, то класс дробно дифференцируемых функций достаточно широк также, как и класс абсолютно интегрируемых функций. Стоит отметить, что из всего многообразия существующих правил дробного дифференцирования [14-16] (например, дробная производная Гельдера или Римана), мы воспользовались правилом (1), считая его наиболее простым и удобным в силу того, что в предельном случае, когда $\varepsilon \to 0$, оператор $\hat{A}$ вырождается в обычную производную. Кроме того, как это было строго доказано в работе [17], такой подход (в виде правила (1)) позволяет находить любые дробные производные аналитически, чего, в принципе, нельзя сделать с помощью интеграла Стильтьеса, используемого многими авторами при исследовании отдельных физических свойств фрактальных структур (см., скажем, монографию [18]). Заметим также, что определение (1) автоматически приводит к действительному выражению для дробной производной $\hat{A}f$.

При изучении физических свойств фракталов всегда существует важнейшая проблема, связанная с введением правильной размерности соответствующего параметра. С этой целью в работе [19] было впервые введено такое важное понятие, как мера на фрактале. С ее помощью легко учесть тот факт, что сам фрактал ни в одной точке не дифференцируем, но мы можем ввести сглаженную по острым угловым точкам фрактала топологически одномерную кривую, и для нее дать определение элемента длины с мерой (см. [19])

$$\mu_x = \frac{\exp(Ce^{\varepsilon})}{l^{\varepsilon}}, \tag{2}$$

где l –геометрическая длина физического фрактала, C – константа. Конечность этой длины (в отличие от математического фрактала) обусловлена ограничением длины фрактального излома, которая, казалось бы, должна соответствовать межатомному расстоянию. Подобное предположение не лишено физического смысла, однако, когда речь заходит о диссипативных характеристиках материалов (скажем о теплопроводности или проводимости), то эти свойства должны определяться лишь длиной свободного пробега частиц или квазичастиц. Придерживаясь этой концепции, мы будем задавать ограничение фрактального излома не величиной межатомного расстояния, а величиной порядка длины свободного пробега, которая, например, для электронов проводимости, составляет величину примерно равную $l_e \approx 10^{-5} cm$. С учетом этого факта, результат вычисления меры μ приведен в таблице.

Таблица

	Кох	Серпинский	Пеано	Менгер
D_F	1.26	1.89	2	2.73
ε	0.26	0.89	1	1.73
l	18	$5 \cdot 10^4$	$1.1 \cdot 10^5$	$1.4 \cdot 10^9$
C	0.79	4.36	4.67	6.8
μ_x	1.33	2.66	3	6.7

Как видно из этой таблицы, легко проследить за качественно правильным поведением меры μ, которая плавно растет вместе с параметром фрактальности ε.

Квазиклассическое кинетическое уравнение и его применение к фракталам

При аналитическом исследовании диссипативных характеристик любых материалов весьма надежным и хорошо зарекомендовавшим себя в решении конкретных физических задач, является квазиклассическое кинетическое уравнение (сокращенно

ККУ) (см., к примеру, монографии [20 - 22]). С целью приложения ККУ к фрактальным структурам мы сделаем простое формальное допущение, которое формально связано просто с заменой операторов обычного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ и $\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$ на операторы дробного дифференцирования соответственно $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{r}}$ и $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{p}}$, где $f = f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ функция распределения. При этом обобщенное ККУ (сокращенно ОККУ) можно представить как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}_\varepsilon \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{r}} f + \dot{\mathbf{p}}_\varepsilon \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{p}} f = L\{f\}, \tag{3}$$

где $L\{f\}$ – интеграл столкновений, $\mathbf{u}_\varepsilon = (u_x, u_y, u_z)$ – обычная скорость, $\dot{\mathbf{p}}_\varepsilon = (\dot{p}_x, \dot{p}_y, \dot{p}_z$ – скорость в импульсном пространстве. Индекс ε указывает на зависимость скорости от параметра фрактальности ε (см. ниже).

В фазовом шестимерном объеме вектор $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{r}} = A_1\mathbf{e}_1 + A_2\mathbf{e}_2 + A_3\mathbf{e}_3$, а $\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{p}} = A_4\mathbf{e}_4 + A_5\mathbf{e}_5 + A_6\mathbf{e}_6$, где единичные орты $\mathbf{e}_i$, $i = 1...6$, представляют собой ортонормированный базис. Считая в общем случае импульсное пространство также фрактальным, имеем

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = i \int\limits_V \mathbf{r}'(ir')^\varepsilon f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r}') d^3 r'. \tag{4}$$

Появление трех пространственных координат внутри топологически одномерного объекта вполне объяснимо с физической точки зрения: математическая идеальная кривая задает лишь форму реального объекта, который естественным образом трехмерен [16]. Изменение временной переменной t считается плавным и поэтому оператор $\frac{\partial f}{\partial t}$ остается без изменения. Это же относится и к интегралу столкновений в кинетическом уравнении, хотя спектр частиц (или квазичастиц) претерпевает изменение и является функцией фрактальной размерности ε (см. ниже). Как видно из (3), закон сохранения частиц консервативной системы, выполняется. В самом деле, если уравнение (3) проинтегрировать по фазовому объему $\Delta\Gamma = \frac{d^3 p d^3 x}{(2\pi\hbar)^3}$, то можно прийти к равенству

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f d\Gamma + i \int (ik)^\varepsilon (\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) f_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d\Gamma = L(f) d\Gamma, \tag{5}$$

Это означает, что при фиксированном направлении вектора шестимерной скорости второе слагаемое здесь автоматически исчезает, а в силу H – теоремы Больцмана интеграл в правой части обращается в нуль. В результате автоматически получаем искомое условие сохранении числа частиц $N = \int f d\Gamma = const$. Рассмотрим теперь два конкретных примера применения ОККУ (3).

Теплопроводность металлического фрактала

Пусть квазиравновесная фермиевская функция распределения свободных электронов будет

$$\bar{f} = \frac{1}{\exp\left(\frac{E(p) - \xi(\mathbf{r})}{T(\mathbf{r})}\right) + 1}, \tag{6}$$

где ξ – химический потенциал электрона, а m – его масса. Закон дисперсии электронов можно представить в виде

$$E(p)=\frac{p^2}{2m\mu_x^2} \tag{7}$$

в предположении, что импульсное пространство может быть также фрактально. В случае гладкой кривой, когда мера $\mu_x=1$ при $\varepsilon=0$, зависимость (7) превращается в обычное выражение для энергии свободного электрона $E(p)=\dfrac{p^2}{2m}$. Вычисление тензора теплопроводности основывается на тождественности двух выражений: 1. Потока тепла, записанного в форме закона Фурье и 2. Выражения, полученного в газокинетическом приближении, найденного с помощью ОККУ (3). Согласно закону Фурье, тепловой поток, модифицированный на случай фрактального объекта, можно представить следующим образом (ср. с [20]):

$$\mathbf{q}=-\kappa\hat{\mathbf{A}}T=-i\kappa\int\limits_{V_k}(ik)^{\varepsilon}\mathbf{k}\exp(i\mathbf{kr})T_{\mathbf{k}}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{8}$$

где κ – искомый коэффициент теплопроводности.

С другой стороны, если воспользоваться формальным определением теплового пото-ка, который представляет собой энергию, излучаемую единицей поверхности в единицу времени, то в соответствии с газокинетическим приближением, мы имеем право написать, что

$$\mathbf{q}=\int\limits_{V_p}E(p)\mathbf{u}_{\varepsilon}f_p\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tag{9}$$

где $\mathbf{u}_{\varepsilon}$ фрактальная скорость электрона.

Будем искать решение ОККУ для функции распределения электронов в аддитивном виде $f_p=\bar{f}+\delta f$. Где искомую поправку δf можно записать как $\delta f=\dfrac{\partial\bar{f}}{\partial T_0}\delta T$, где разность температур $\delta T=T-T_0$. Если в выражение (9) подставить сумму $f_p=\bar{f}+\delta f$, где квазиравновесная функция распределения определяется выражением (6), а малая добавка

$$\delta f=\frac{\partial\bar{f}}{\partial T_0}\delta T=\frac{\partial\bar{f}}{\partial T_0}(T-T_0),$$

то благодаря тому факту, что

$$\mathbf{q}=\int E(p)\mathbf{u}_{\varepsilon}\bar{f}_p\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}=0,$$

получаем

$$\mathbf{q}=\int\limits_{V_p}E(p)\mathbf{u}_{\varepsilon}\delta f_p\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}.$$

В результате формула (9) примет вид

$$\mathbf{q}=\int\limits_{V_k}E(p)\mathbf{u}_{\varepsilon}\delta f_p\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{10}$$

Чтобы вычислить поправку δf, можно воспользоваться так называемым τ –приближением. В стационарном случае, когда $\dfrac{\partial f}{\partial t}=0$ и $\dot{\mathbf{p}}_\varepsilon\cdot\hat{\mathbf{A}}_p f=0$, из ОККУ следует, что

$$\mathbf{u}_\varepsilon\cdot\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{r}}\bar{f}=-\frac{\partial f}{\tau_p}$$

при учете, что интеграл столкновений

$$L(f)\approx-\frac{\partial f}{\tau_p}.$$

Отсюда сразу же находится интересующее нас решение

$$\delta f=-\tau_p\mathbf{u}_\varepsilon\cdot\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{r}}\bar{f}=-\tau_p\frac{\partial\bar{f}}{\partial T_0}\mathbf{u}_\varepsilon\cdot\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{r}}T.$$

В результате формула (10) принимает вид

$$\mathbf{q}=\int E(p)\mathbf{u}_\varepsilon\left(\tau_p\mathbf{u}_\varepsilon\frac{\partial\bar{f}}{\partial T_0}\hat{\mathbf{A}}T\right)\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}=$$
$$=-i\int E(p)\tau_p\mathbf{u}_\varepsilon(ik)^\varepsilon\left(\mathbf{u}_\varepsilon\cdot\mathbf{k}\right)\frac{\partial\bar{f}}{\partial T_0}\exp(i\mathbf{kr})T_k\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (11)$$

Из условия равенства выражений (8) и (11) немедленно находится тензор теплопроводности металлической фрактальной структуры

$$\kappa_{ik}=2\int E(p)\tau_p u_{i\varepsilon}u_{k\varepsilon}\frac{\partial\bar{f}}{\partial T_0}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (12)$$

«Двойка» перед интегралом учитывает кратность вырождения по спину электрона. Не изменяя общности выражения (12) его можно немного упростить. При условии, что кристаллическая структура обладает кубической симметрией, внутреннее строение фрактального объекта может считаться изотропным и тензор κ_{ik} теплопроводности запишется тогда в виде $\kappa_{ik}=\kappa\cdot\delta_{ik}$, где символ Кронекера. В результате произведение компонент скорости $u_{\varepsilon_i}u_{\varepsilon_k}$ можно заменить на $\dfrac{u_\varepsilon^2}{3}\cdot\delta_{ik}$, где множитель $\dfrac{1}{3}$ появляется после усреднения по направлениям $\mathbf{u}$. Далее, согласно (2) скорость определяется как

$$\mathbf{u}_\varepsilon=\frac{\partial E}{\partial\mathbf{p}}=\frac{\mathbf{p}}{m\mu_x^2},$$

а потому

$$\frac{\mathbf{u}_\varepsilon}{3}=\frac{p^2}{3m^2\mu_x^4}. \quad (13)$$

В силу того, что спектр электронов фрактального металла является анизотропным, время релаксации электронов τ_p также является функцией ε. С помощью теоремы о среднем время релаксации можно вынести из – под знака интеграла, и писать его как $\bar{\tau}_\varepsilon$. В итоге получаем

$$\kappa=\frac{4\bar{\tau}_\varepsilon}{3m^2\mu_x^4}\int p^2E(p)\frac{\partial\bar{f}}{\partial T_0}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (14)$$

Простой переход от декартовых координат к сферическим согласно формулам $p_x = p\sin\theta\cos\phi$, $p_y = p\sin\theta\sin\phi$, $p_z = p\cos\theta$ позволяет легко вычислить фигурирующий здесь интеграл. В результате будем иметь

$$\kappa = \frac{2\bar{\tau}_\varepsilon}{3m^2\pi^2\hbar^3\mu_x^4}\int\limits_0^\infty E(p)p^4\frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0}dp. \quad (15)$$

Пользуясь приближением вырожденного электронного газа, согласно которому производная

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial T_0} \approx \frac{E(p)-\xi}{T_0}\delta(E-E_F), \quad (16)$$

где E_F – энергия Ферми. Поскольку для химического потенциала справедливо приближенное соотношение

$$\xi \approx E_F - \frac{\pi^3}{6}\frac{T_0^2}{E_F}, \quad (17)$$

то с учетом (16) и (17) и благодаря свойствам дельта – функции находим из (15)

$$\kappa = \frac{\bar{\tau}_\varepsilon T_0 k_F^3}{18m\mu_x^4}, \quad (18)$$

где $k_F = \frac{p_F}{\hbar} \approx \frac{\pi}{a}$, a – межатомное расстояние. Благодаря этой формуле легко находится зависимость коэффициента теплопроводности металлического фрактала от его геометрических параметров. Здесь, однако, следует иметь ввиду, что время релаксации будет зависеть от фрактальной размерности ε.

Тензор проводимости металлического фрактала

Еще одним примером приложения ОККУ может служить вычисление тензора элек-тропроводности фрактальной металлической проволоки.

При вычислении тензора проводимости в рамках уравнения (3) следует помнить, что неоднородные слагаемые по пространственным координатам в нем должны быть опущены, поскольку ответ на вопрос о вычислении тензора проводимости металла может дать только учет силы Лоренца. Сказанное означает, что уравнение (3) следует представить в более компактном виде, как

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{p}}_\varepsilon \cdot \hat{\mathbf{A}}_\mathbf{p} f = L\{f\}. \quad (19)$$

Выражение для плотности тока фрактальной проволоки можно записать в виде

$$\mathbf{j} = 2e\int \mathbf{u}_\varepsilon(\bar{f} + \delta f)\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (20)$$

В стационарном случае уравнение (19) и в тау – приближении сводится к виду

$$\dot{\mathbf{p}}_\varepsilon \cdot \hat{\mathbf{A}}_\mathbf{p} f = -\frac{\delta f}{\tau_p}. \quad (21)$$

Поскольку при движении в электрическом поле уравнение движения электрона есть $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F} = e\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ напряженность электрического поля, e – заряд электрона, то искомое выражение для поправки δf будет

$$\delta f = -\tau_p e\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{A}}_p\bar{f}. \tag{22}$$

Считая ради простоты импульсное пространство не фрактальным, а обычным, имеем

$$\hat{\mathbf{A}}_p\bar{f} = \frac{\partial\bar{f}}{\partial E_p}\cdot\frac{\partial E_p}{\partial\mathbf{p}} = \mathbf{u}_\varepsilon\frac{\partial\bar{f}}{\partial E_p}, \tag{23}$$

где скорость $\mathbf{u}_\varepsilon$ согласно определению $\mathbf{u}_\varepsilon = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ должна зависеть от энергии E_p, где мы во избежание путаницы с обозначением электрического поля ввели в обозначении энергии нижний индекс p. В результате для плотности тока с учетом (20), (22) и (23) получим

$$\mathbf{j} = -\frac{2e^2}{\mu_x^2}\int\tau_p(E_p)\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{E}\cdot\mathbf{u}_\varepsilon)\frac{\partial\bar{f}}{\partial E_p}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{24}$$

Сравнивая (24) с законом Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, находим искомый тензор проводимости фрактальной одномерной металлической структуры

$$\sigma_{ik} = -\frac{2e^2}{\mu_x^2}\int\tau_p(E)u_{i\varepsilon}u_{k\varepsilon}\frac{\partial\bar{f}}{\partial E_p}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{25}$$

Для оценки зависимости (25) можно считать кристалл изотропным и для коэффициента проводимости имеем

$$\sigma = -\frac{2e^2}{\mu_x^2}\int\tau_p(E)u_\varepsilon^2\frac{\partial\bar{f}}{\partial E_\mathbf{p}}\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \approx \frac{2e^2}{\mu_x^2}\int\tau_p(E)u_\varepsilon^2\delta(E(p)-E_F)\frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}, \tag{26}$$

В рассматриваемом случае вырожденного электронного газа, когда выполнено неравенство $T \ll E_F = \dfrac{p_F^2}{2m}$ можно воспользоваться приближенным равенством $\dfrac{\partial\bar{f}}{\partial E_p} \approx -\delta(E_p - E_F)$. Пользуясь свойствами дельта – функции, из (26) находим

$$\sigma \approx \frac{e^2\bar{\tau}_\varepsilon k_F^3}{m\mu_x^2}. \tag{27}$$

Заключение

Заканчивая работу, еще раз обратим внимание на ряд основных результатов, полученных выше.

1) Предложено формальное математическое обобщение квазиклассического кинетического уравнения на фрактальные структуры, позволяющее исследовать любые релаксационные явления в квазиклассическом приближении в структурах нецелой размерности.

2) В качестве конкретных примеров его применения приведены вычисления коэффициентов теплопроводности и проводимости тонкой фрактальной проволоки.

3) Найдена зависимость между фрактальной размерностью объекта и его диссипативными характеристиками.

Список литературы/References

[1] Мандельброт Б., *Фрактальная геометрия природы*, РХД, Ижевск, 2002, 665 с.].

[2] Mandel'brot B., *Fraktal'naya geometriya prirody*, RKHD, Izhevsk, 2002, 665 c., (in Russian).

[3] Федер Е., *Фракталы*, Мир, Москва, 1991, 254 с. [Feder Ye., *Fraktaly*, Mir, Moskva, 1991, 254 pp., (in Russian)].

[4] Шредер М., *Фракталы, хаос, степенные законы*, РХД, Ижевск, 2001, 528 с. [Shreder M., *Fraktaly, khaos, stepennyye zakony*, RKHD, Izhevsk, 2001, 528 pp., (in Russian)].

[5] Дубинова А.Е., *Фракталы в прикладной физике*, ВНИИЭФ, Арзамас-16, 1995, 216 с. [Dubinova A.Ye., *Fraktaly v prikladnoy fizike*, VNIIEF, Arzamas-16, 1995, 216 pp., (in Russian)].

[6] Пьетронезе Л., *Фракталы в физике*, Труды 6 международного симпозиума по фракталам в физике (Триест, Италия, 9-12 июля 1985г), Мир, Москва, 1988, 672 с. [P'yetroneze L., *Fraktaly v fizike*, Trudy 6 mezhdunarodnogo simpoziuma po fraktalam v fizike (Triyest, Italiya, 9-12 iyulya 1985g), Mir, Moskva, 1988, 672 pp., (in Russian)].

[7] Chen J. D.,Wilkinson D., "Pore – scale viscous fingering in porous media", *Phys. Rev. Lett.*, **55** (1985), 1892–1895.

[8] Schaefer D. W.,Martin J. E.,Wiltzius P., "Fractal geomenry of cooloidal agregates", *Phys. Rev. Lett.*, **52** (1984), 2371–2374.

[9] Урысон П. С., *Труды по топологии и другим областям математики*. Т. 1, Гостехтеоретиздат, М., 1951, 512 с. [Uryson P. S., *Trudy po topologii i drugim oblastyam matematiki*. V. 1, Gostekhteoretizdat, M., 1951, 512 pp., (in Russian)].

[10] Виноградова И. М., *Математическая энциклопедия*. Т. 3, Советская Энциклопедия, М., 1982, 1184 с. [Vinogradova I. M., *Matematicheskaya entsiklopediya*. V. 3, Sovetskaya Entsiklopediya, M., 1982, 1184 pp., (in Russian)].

[11] Гладков С. О., "К теории одномерной и квазиодномерной теплопроводности", *ЖТФ*, **67**:7 (1997), 8–12. [Gladkov S. O., "K teorii odnomernoy i kvaziodnomernoy teploprovodnosti", *ZHTF*, **67**:7 (1997), 8–12, (in Russian)].

[12] Gladkov S. O.,Bogdanova S. B., "The heat-transfer theory for quasi-n-dimensional system", *Physica B: Journal of Condensed matter*, **405** (2010), 1975–1977.

[13] Гладков С. О., Богданова С. Б., "О продольной магнитной восприимчивости фрактальных ферродиэлектриков", *Известия РАН. Серия физическая*, **75**:10 (2011), 1418-1422. [Gladkov S. O., Bogdanova S. B., "O prodol'noy magnitnoy vospriimchivosti fraktal'nykh ferrodielektrikov", *Izvestiya RAN. Seriya fizicheskaya*, **75**:10 (2011), 1418-1422, (in Russian)].

[14] Гладков С. О., Богданова С. Б., "К теории продольной магнитной восприимчивости квазитрехмерных ферромагнитных диэлектриков", *Физика твердого тела*, **54**:1 (2012), 70-73. [Gladkov S. O., Bogdanova S. B., "K teorii prodol'noy magnitnoy vospriimchivosti kvazitrekhmernykh ferromagnitnykh dielektrikov", *Fizika tverdogo tela*, **54**:1 (2012), 70-73, (in Russian)].

[15] Джрбашян М. М., *Интегральные преобразования и представления в комплексной плоскости*, Наука, Москва, 1966, 672 с. [Dzhrbashyan M. M., *Integral'nyye preobrazovaniya i predstavleniya v kompleksnoy ploskosti*, Nauka, Moskva, 1966, 672 pp., (in Russian)].

[16] Летников А. В., *Теория дифференцирования с произвольным указателем*, Москва, 1868, 96 с. [Letnikov A. V., *Teoriya differentsirovaniya s proizvol'nym ukazatelem*, Moskva, 1868, 96 pp., (in Russian)].

[17] Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д., "Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика", *УФН*, **146**:3 (1985), 493-506. [Zel'dovich YA. B., Sokolov D. D., "Fraktaly, podobiye, promezhutochnaya asimptotika", *UFN*, **146**:3 (1985), 493-506, (in Russian)].

[18] Гладков С. О., Богданова С. Б., "К вопросу о дробном дифференцировании", *Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия*, **24**:3 (2018), 7-13. [Gladkov S. O., Bogdanova S. B., "K voprosu o drobnom differentsirovanii", *Vestnik Samarskogo universiteta. Yestestvennonauchnaya seriya*, **24**:3 (2018), 7-13, (in Russian)].

[19] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 688 с.].

[20] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya*, Nauka i tekhnika, Minsk, 1987, 688 с., (in Russian).

[21] Гладков С. О., Богданова С. Б., "К вопросу о магнитной восприимчивости фрактальных ферромагнитных проволок", *Известия вузов. Физика*, **57**:4 (2014), 44-47. [Gladkov S. O., Bogdanova S. B., "K voprosu o magnitnoy vospriimchivosti fraktal'nykh ferromagnitnykh provolok", *Izvestiya vuzov. Fizika*, **57**:4 (2014), 44-47, (in Russian)].

[22] Гладков С. О., *Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства*, Наука, Москва, 1999, 330 с. [Gladkov S. O., *Fizika kompozitov: termodinamicheskiye i dissipativnyye svoystva*, Nauka, Moskva, 1999, 330 pp., (in Russian)].

[23] Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В., *Спиновые волны*, Наука, Москва, 1967, 368 с. [Akhiyezer A. I., Bar'yakhtar V. G., Peletminskiy S. V., *Spinovyye volny*, Nauka, Moskva, 1967, 368 pp., (in Russian)].

[24] Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И., *Электронная теория металлов*, Наука, Москва, 1971, 450 с. [Lifshits I. M., Azbel' M. YA., Kaganov M. I., *Elektronnaya teoriya metallov*, Nauka, Moskva, 1971, 450 pp., (in Russian)].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Ижевск: РХД, 2002. 665 с.

[2] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.

[3] Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Ижевск: РХД, 2001. 528 с.

[4] Дубинова А.Е. Фракталы в прикладной физике. Арзамас-16. ВНИИЭФ. 1995. 216 с.

[5] Пьетронезе Л. Фракталы в физике. Труды 6 международного симпозиума по фракталам в физике (Триест, Италия, 9-12 июля 1985г). М.: Мир, 1988. 672 с.

[6] Chen J. D.,Wilkinson D. Pore – scale viscous fingering in porous media // Phys. Rev. Lett. 1985. no. 55. pp. 1892–1895.

[7] Schaefer D. W.,Martin J. E.,Wiltzius P. Fractal geomenry of cooloidal agregates // Phys. Rev. Lett. 1984. no. 52. pp. 2371–2374.

[8] Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Т. 1. М.: Гостехтеоретиздат, 1951. 512 с.

[9] Виноградова И. М. Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Советская Энциклопедия, 1982. 1184 с.

[10] Гладков С. О. К теории одномерной и квазиодномерной теплопроводности // ЖТФ. 1997. Т. 67. №7. С. 8–12.

[11] Gladkov S. O.,Bogdanova S. B. The heat-transfer theory for quasi-n-dimensional system // Physica B: Journal of Condensed matter. 2010. vol. 405. pp. 1975–1977.

[12] Гладков С. О., Богданова С. Б. О продольной магнитной восприимчивости фрактальных ферродиэлектриков // Известия РАН. Серия физическая. 2011. Т. 75. №10. С. 1418-1422.

[13] Гладков С. О., Богданова С. Б. К теории продольной магнитной восприимчивости квазитрехмерных ферромагнитных диэлектриков // Физика твердого тела. 2012. Т. 54. №1. С. 70-73.

[14] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления в комплексной плоскости. М.: Наука, 1966. 672 с.

[15] Летников А. В. Теория дифференцирования с произвольным указателем. Москва. 1868. 96 с.

[16] Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // УФН. 1985. Т. 146. №3. С. 493-506.

[17] Гладков С. О., Богданова С. Б. К вопросу о дробном дифференцировании // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2018. Т. 24. №3. С. 7-13.

[18] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

[19] Гладков С. О., Богданова С. Б. К вопросу о магнитной восприимчивости фрактальных ферромагнитных проволок // Известия вузов. Физика. 2014. Т. 57. №4. С. 44-47.
[20] Гладков С. О. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999. 330 с.
[21] Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
[22] Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов. М.: Наука, 1971. 450 с.

Для цитирования: Гладков С. О., Богданова С. Б. К теории теплопроводности и проводимости металлических фракталов // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 29. № 4. С. 98-109. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-98-109

For citation: Gladkov S. O., Bogdanova S. B. To the theory of thermal conduction and conductivity of metal fractals, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2019, **29**: 4, 98-109. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-98-109

Поступила в редакцию / Original article submitted: 08.10.2019

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2019. vol. 29. no.4. pp. 98–109.

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-98-109

PHYSICS

MSC 80A20

TO THE THEORY OF THERMAL CONDUCTION AND CONDUCTIVITY OF METAL FRACTALS

S. O. Gladkov, S. B. Bogdanova

Moscow Aviation Institute, 125993, Moscow,
Volokolamskoe shosse,4, Russia
E-mail: sglad51@mail.ru

In the paper, it is suggsted an analytical approach of the physical description of fractal metal structures. The calculatuions are based on using quasiclassical Boltzmann kinetic equation and formally introduced operations of fractional differentiation. As examples of its application, the thermal conduction coefficients and conductivity of the metal fractal are calculated. What is more, it is shown the main difference between physical properties of fractal objects and ordinary smooth samples

Key words: quasiclassical kinetic equation, fractal, fractional differentiation, conductivity, thermal conduction