Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 28. № 3. С. 32-39. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-32-39

УДК 517.927

НЕРАВЕНСТВО ЛЯПУНОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С РАЗЛИЧНЫМИ НАЧАЛАМИ

Л. М. Энеева

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения "Федеральный научный центр "Кабардино-Балкарский научный центр РАН", 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: eneeva72@list.ru

В работе рассмотрено обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка, содержащее композицию дробных производных с различными началами, являющееся модельным уравнением движения во фрактальной среде. Для рассматриваемого уравнения найдено необходимое условие существования нетривиального решения однородной задачи Дирихле. Условие имеет форму интегральной оценки для потенциала и является аналогом неравенства Ляпунова.

Ключевые слова: дробная производная Римана-Лиувилля, дробная производная Капуто, задача Дирихле, неравенство Ляпунова.

Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)-q(x)u(x)=0, \tag{1}$$

где $q(x)$ — непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция, а D_{0x}^{α} и ∂_{1x}^{α} — дробные производные порядка α, $0<\alpha<1$, по переменной $x\in]0,1[$, в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке $x=0$, и в смысле Капуто с началом в точке $x=1$, соответственно, определяемые равенствами [1]:

$$D_{0x}^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_0^x u(t)(x-t)^{-\alpha}dt,$$

и

$$\partial_{1x}^{\alpha}u(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_x^1 (t-x)^{-\alpha}\frac{d}{dt}u(t)dt.$$

Дифференциальные уравнения с операторами дробного интегрирования и дифференцирования, как правило, лежат в основе математических моделей физических и геофизических процессов, протекающих во фрактальных средах [1]. При этом, понятие эффективной скорости изменения тех или иных физических величин [2], характеризующих моделируемые процессы, приводит к дифференциальным уравнениям, содержащим композицию операторов дробного дифференцирования с различными началами [3].

В работе [4] исследована спектральная задача для уравнения

$$D_{0x}^{\alpha}\partial_{1x}^{\alpha}u(x)-\lambda u(x)=0. \tag{2}$$

В работе [5] найдена нижняя оценка для первого собственного значения задачи Дирихле для уравнения (2). В работе [6] для уравнения (2) исследован вопрос разрешимости задачи Неймана для уравнения дробного порядка с различными началами, найдена оценка для первого ненулевого собственного значения.

Отметим также работы [7] – [10], в которых рассматривались различные вопросы теории дифференциальных уравнений, содержащих композицию операторов дробного дифференцирования с различными началами.

В данной работе мы находим необходимое условие существования отличного от тождественного нуля решения однородной задачи Дирихле для уравнения (1). Условие имеет форму интегральной оценки для потенциала и является аналогом неравенства Ляпунова [11], [12].

Неравенство Ляпунова для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка с левосторонней дробной производной доказано в работе [13].

Вспомогательные утверждения

Введем обозначения

$$K(x,t)=\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_{\max\{x,t\}}^{1}(s-x)^{\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1}ds \tag{3}$$

и

$$G(x,t)=K(x,t)-\frac{K(x,0)K(0,t)}{K(0,0)}. \tag{4}$$

Нетрудно заметить, если $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$, то

$$G(x,t)\in C\left([0,1]\times[0,1]\right). \tag{5}$$

Лемма. *Пусть $\frac{1}{2}<\alpha<1$. Справедливы следующие соотношения*

1)

$$\frac{\partial}{\partial t}K(0,t)<0 \qquad \forall t\in]0,1[; \tag{6}$$

2)

$$\frac{\partial}{\partial t}K(x,t)>0 \qquad \forall t<x<1; \tag{7}$$

3)

$$G(x,t)>0 \qquad \forall(x,t)\in]0,1[\times]0,1[\tag{8}$$

4)

$$\sup_{0<x,t<1}G(x,t)=\sup_{0<x<1}G(x,x)>0. \tag{9}$$

Доказательство. 1) Интегрируя по частям в правой части (3) получаем

$$K(0,t)=\frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_t^1 s^{\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1}ds=$$

$$=\frac{(1-t)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+1)}-\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\alpha+1)}\int_t^1 s^{\alpha-2}(s-t)^{\alpha}ds.$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t}K(0,t)=-\frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma^2(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)\Gamma(\alpha)}\int_t^1 s^{\alpha-2}(s-t)^{\alpha-1}ds.$$

Принимая во внимание, что $\Gamma(\alpha) > 0$, а $\Gamma(\alpha - 1) < 0$ при $\alpha \in]-\frac{1}{2}, 1[$, приходим к (6).

2) В силу определения (3), для $t < x < 1$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}K(x,t) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\frac{\partial}{\partial t}\int_x^1 (s-x)^{\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1}ds =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-1)}\int_x^1 (s-x)^{\alpha-1}(s-t)^{\alpha-2}ds > 0$$

3) Из (3) и (4) следует, что

$$G(x,t) = G(t,x). \tag{10}$$

Поэтому неравенство (8) достаточно доказать для $0 < t \le x < 1$.

Так как $K(x,0) > 0$ для всех $x \in [0,1[$, то принимая во внимание неравенства (6) и (7) получаем, что

$$\frac{\partial}{\partial t}G(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}K(x,t) - \frac{K(x,0)}{K(0,0)}\frac{\partial}{\partial t}K(0,t) > 0 \qquad (0 < t \le x < 1). \tag{11}$$

Вместо с равенством

$$G(x,0) = 0 \tag{12}$$

это доказывает (8).

4) Из (11) и (12) следует, что для любого фиксированного $x \in]0,1[$ имеет место равенство

$$\sup_{0<t<x} G(x,t) = G(x,x). \tag{13}$$

Учитывая (10) приходим к (9). □

Под регулярным решением уравнения (1) будем понимать функцию $u(x) \in C^1[0,1]$ такую, что $D_{0x}^{\alpha-1}\partial_{1x}^{\alpha}u(x) \in AC[0,1]$, и удовлетворяющую уравнению (1) для всех x из интервала $]0,1[$. Как обычно, $AC[0,1]$ обозначает пространство абсолютно непрерывных на $[0,1]$ функций.

Лемма. *Пусть $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ и $u(x)$ — регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{14}$$

Тогда функция $u(x)$ является решением интегрального уравнения

$$u(x) = \int_0^1 G(x,t)q(t)u(t)dt. \tag{15}$$

Доказательство. Действительно, если $u(x)$ является решением уравнения (1), то в силу свойств операторов дробного дифференцирования и определения регулярного решение, можем записать

$$\partial_{1x}^{\alpha}u(x) - D_{0x}^{-\alpha}q(x)u(x) = Cx^{\alpha-1},$$

и, учитывая, что $u(1) = 0$,

$$u(x) - D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}q(x)u(x) = CD_{1x}^{-\alpha}x^{\alpha-1}. \tag{16}$$

Принимая во внимание обозначение (3), получаем

$$D_{1x}^{-\alpha}x^{\alpha-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1 (s-x)^{\alpha-1}s^{\alpha-1}\,ds = \Gamma(\alpha)K(x,0),$$

и

$$D_{1x}^{-\alpha}D_{0x}^{-\alpha}q(x)u(x) = \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_x^1 (s-x)^{\alpha-1}\int_0^s (s-t)^{\alpha-1}q(t)u(t)\,dt\,ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^1 q(t)u(t)\int_{\max\{x,t\}}^1 (s-x)^{\alpha-1}(s-t)^{\alpha-1}\,ds\,dt = \int_0^1 q(t)u(t)K(x,t)\,dt.$$

Таким образом, уравнение (16) можно переписать в виде

$$u(x) - \int_0^1 q(t)u(t)K(x,t)\,dt = C\Gamma(\alpha)\,K(x,0). \tag{17}$$

Устремляя в (17) x к нулю, из условия $u(0)=0$ находим, что

$$C=-[\Gamma(\alpha)K(0,0)]^{-1}\int_0^1 q(t)u(t)K(0,t)\,dt. \tag{18}$$

Подставляя найденное значение для постоянной C в уравнение (17), после простых преобразований получаем

$$u(x)=\int_0^1 q(t)u(t)K(x,t)\,dt-\frac{K(x,0)}{K(0,0)}\int_0^1 q(t)u(t)K(0,t)\,dt=$$
$$=\int_0^1 q(t)u(t)\left[K(x,t)-\frac{K(x,0)K(0,t)}{K(0,0)}\right]dt.$$

С учетом обозначения (4), последнее доказывает справедливость равенства (15). □

Основные результаты

Теорема. *Пусть* $\frac{1}{2}<\alpha<1$ *и уравнение* (1) *имеет регулярное решение* $u(x)$, *удовлетворяющее краевым условиям* (14). *Для того, чтобы функция* $u(x)$ *не равнялась тождественно нулю, необходимо выполнение неравенства*

$$\sup_{[0,1]}\int_0^1 G(x,t)|q(t)|\,dt>1. \tag{19}$$

Доказательство. В силу (5), (8) и (15) можем записать

$$|u(x)|\le\int_0^1 |u(t)|G(x,t)|q(t)|dt. \tag{20}$$

Обозначим через u_m максимум функции $|u(x)|$ на отрезке $[0,1]$, т.е.

$$u_m=\sup_{[0,1]}|u(x)|.$$

Очевидно, $u_m>0$, $u_m-|u(t)|\le 0$ и $u_m-|u(t)|\not\equiv 0$. Поэтому, с учетом (8), для любого достаточно малого положительного ε и всех x из отрезка $[\varepsilon,1-\varepsilon]$ справедливо неравенство

$$\int_0^1(u_m-|u(t)|)\,G(x,t)|q(t)|dt>0.$$

Вместе с (20) отсюда следует, что

$$|u(x)|<u_m\int_0^1 G(x,t)|q(t)|dt \qquad \forall x\in[\varepsilon,1-\varepsilon],$$

или, с учетом непрерывности функции $|u(x)|$ на отрезке $[0,1]$,

$$\frac{1}{u_m}\sup_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}|u(x)|<\sup_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}\int_0^1 G(x,t)|q(t)|dt\le\sup_{[0,1]}\int_0^1 G(x,t)|q(t)|dt. \tag{21}$$

В силу (14) для достаточно малого ε имеет место равенство $\sup_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}|u(x)|=u_m$. С учетом этого, из неравенства (21) следует (19). □

Следствие. Пусть $\frac{1}{2}<\alpha<1$ и $u(x)$ — неравное тождественно нулю регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (14). Тогда

$$\int_0^1|q(t)|dt>\left(\sup_{0<x<1}H(x)\right)^{-1}, \tag{22}$$

где $H(x)=G(x,x)$.

Доказательство. Действительно, из (8) и (19) следует, что

$$\int_0^1|q(t)|dt>\left(\sup_{0<x,t<1}G(x,t)\right)^{-1}.$$

Принимая во внимание (9), это доказывает (22). □

Заметим, что в силу (4) и определения функции $H(x)$ имеет место равенство

$$H(x)=\frac{(1-x)^{\beta}}{\beta\Gamma^{2}(\alpha)}-\frac{K^{2}(x,0)}{K(0,0)},$$

где (здесь и далее)

$$\beta=2\alpha-1.$$

Более того,

$$K(x,0)=\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)}\int_{x}^{1}s^{\alpha-1}(s-x)^{\alpha-1}ds\geq\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)}\int_{x}^{1}s^{2\alpha-2}ds=\frac{1-x^{\beta}}{\beta\Gamma^{2}(\alpha)}.$$

Поэтому, учитывая равенство

$$K(0,0)=\frac{1}{\beta\Gamma^{2}(\alpha)},$$

получаем

$$H(x)\leq\frac{1}{\beta\Gamma^{2}(\alpha)}\left[(1-x)^{\beta}-\left(1-x^{\beta}\right)^{2}\right].$$

Это доказывает следующее утверждение.

Следствие. Пусть $\frac{1}{2}<\alpha<1$ и $u(x)$ — неравное тождественно нулю регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (14). Тогда

$$\int_{0}^{1}|q(t)|dt>\frac{\beta\Gamma^{2}(\alpha)}{h}, \tag{23}$$

где

$$h=\sup_{0<x<1}\left[(1-x)^{\beta}-\left(1-x^{\beta}\right)^{2}\right],\qquad\beta=2\alpha-1.$$

Замечание. В случае $\alpha=1$ легко заметить, что $\beta\Gamma^{2}(\alpha)=1$ и

$$h=\sup_{0<x<1}\left[1-x-(1-x)^{2}\right]=\frac{1}{4}.$$

Таким образом, неравенство (23) (и следовательно (22) тоже) переходит в классическое неравенство Ляпунова [12]

$$\int_{0}^{1}|q(t)|dt>4.$$

Список литературы/References

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye*, Fizmatlit, Moskva, 2003, 272 pp.]

[2] Рехвиашвили С. Ш., “К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования”, *Нелинейный мир*, **5**:4 (2007), 194–197. [Rekhviashvili S. SH., “K opredeleniyu fizicheskogo smysla drobnogo integro-differentsirovaniya”, *Nelineynyy mir*, **5**:4 (2007), 194–197].

[3] Рехвиашвили С. Ш., “Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики”, *Письма в ЖТФ*, **30**:2 (2004), 33–37. [Rekhviashvili S. SH., “Formalizm Lagranzha s drobnoy proizvodnoy v zadachakh mekhaniki”, *Pis’ma v ZHTF*, **30**:2 (2004), 33–37].

[4] Энеева Л. М., “Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, **3**:2(11) (2015), 39–44. [Eneyeva L. M., “Krayevaya zadacha dlya differentsial’nogo uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, **3**:2(11) (2015), 39–44].

[5] Энеева Л. М., “Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами”, *Известия КБНЦ РАН*, 2017, № 1(75), 34–40. [Eneyeva L. M., “Otsenka pervogo sobstvennogo znacheniya zadachi Dirikhle dlya obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya s proizvodnymi drobnogo poryadka s razlichnymi nachalami”, *Izvestiya KBNTS RAN*, 2017, № 1(75), 34–40].

[6] Энеева Л. М., “О задаче Неймана для уравнения с дробными производными с различными началами”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018, № 4(24), 61–65. [Eneyeva L. M., “O zadache Neymana dlya uravneniya s drobnymi proizvodnymi s razlichnymi nachalami”, *Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. nauki*, 2018, № 4(24), 61–65].

[7] Stanković B., “An equation with left and right fractional derivatives”, *Publications de l’institut mathématique. Nouvelle série,*, **80(94)** (2006), 259–272.

[8] Atanackovic T. M., Stankovic B., “On a differential equation with left and right fractional derivatives”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **10**:2 (2007), 139–150.

[9] Torres C., “Existence of a solution for the fractional forced pendulum”, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, **13**:1 (2014), 125–142.

[10] Tokmagambetov N., Torebek B. T., “Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator”, *Documenta Mathematica*, **21** (2016), 1503–1514.

[11] Ляпуновъ А. М., “Объ одномъ вопросе, касающемся линейныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка съ періодическими коэффиціентами”, *Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер.*, **5** (1897), 190–254. [Lyapunov"A. M., “Ob"odnom"voprose, kasayushchemsya lineynykh"differentsial’nykh"uravneniy vtorogo poryadka s"periodicheskimi koeffitsientami”, *Soobshch. Khar’kov. matem. obshch. Vtoraya ser.*, **5** (1897), 190–254].

[12] Brown R. C., Hinton D. B., “Lyapunov Inequalities and their Applications”, *In: Survey on Classical Inequalities. Mathematics and Its Applications*, **517**, Springer, Dordrecht, 2000.

[13] Ferreira R.A.C., “A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, **16**:4 (2013), 978–984.

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Рехвиашвили С. Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования // Нелинейный мир. 2007. Т. 5. №4. С. 194–197.

[3] Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. №2. С. 33–37.

[4] Энеева Л. М. Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. №2(11). С. 39–44.

[5] Энеева Л. М. Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными началами // Известия КБНЦ РАН. 2017. №1(75). С. 34–40.

[6] Энеева Л. М. О задаче Неймана для уравнения с дробными производными с различными началами // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2018. №4(24). С. 61–65.

[7] Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives // Publications de l’institut mathématique. Nouvelle série. 2006. vol. 80(94). pp. 259–272.

[8] Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2007. vol. 10. №2. pp. 139–150.

[9] Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum // Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics. 2014. vol. 13. no. 1. pp. 125–142.

[10] Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm-Liouville Operator // Documenta Mathematica. 2016. vol. 21. pp. 1503–1514.

[11] Ляпуновъ А. М. Объ одномъ вопросе, касающемся линейныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка съ періодическими коэффиціентами // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1987. Т.5. С. 190–254

[12] Brown R. C., Hinton D. B. Lyapunov Inequalities and their Applications. In: Survey on Classical Inequalities. Mathematics and Its Applications. vol. 517. Dordrecht: Springer, 2000.

[13] Ferreira R.A.C. A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem // Fract. Calc. Appl. Anal. vol. 16. no. 4. 2013. pp. 978–984.

Для цитирования: Энеева Л. М. Неравенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными началами // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2019. Т. 28. № 3. С. 32-39. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-32-39

For citation: Eneeva L. M. Lyapunov inequality for an equation with fractional derivatives with different origins, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2019, **28**: 3, 32-39. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-32-39

Поступила в редакцию / Original article submitted: 04.07.2019

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki. 2019. vol. 28. no.3. pp. 32–39.

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-32-39

MSC 26A33

LYAPUNOV INEQUALITY FOR AN EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVES WITH DIFFERENT ORIGINS

L. M. Eneeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia

E-mail: eneeva72@list.ru

We consider an ordinary differential equation of fractional order with the composition of left- and right-sided fractional derivatives, which is a model equation of motion in fractal media. We find a necessary condition for existence of nontrivial solution of homogeneous Dirichlet problem for the equation under consideration. The condition has the form of integral estimate for the potential and is an analog of Lyapunov inequality.

Key words: Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, Dirichlet problem, Lyapunov inequality