Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 2(18). C. 111-116. ISSN 2079-6641

DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-111-116

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

УДК 510.2

ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОЙ, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ ДАННОЙ ПРЯМОЙ

М. М. Эсонов

Кокандский педагогический институт имени Мукимий, 113000, Узбекистан, Коканд, ул. Амира Темура, 37

E-mail: esonovm@mail.ru

В статье рассматривается задачи о построении прямой, перпендикулярной данной прямой, и о построении прямой, перпендикулярной данной плоскости, как правило, сводятся к построению высоты некоторого треугольника. Эта задача в общем случае является задачей метрического характера.

Ключевые слова: построение перпендикуляра данной прямой, построение высоты, отношение длин, параллельное проектирование, метрическое построение.

EDUCATIONAL-METHODICAL MATERIALS

MSC 58J50

BUILDING A STRAIGHT LINE PERPENDICULAR TO A GIVEN LINE

M. M. Esonov

Kokand State pedagogical Institute by Mukimi, 113000, Uzbekistan, Kokand, Amira Temura st. 37

E-mail: esonovm@mail.ru

The paper deals with the problem of constructing a straight line perpendicular to a given line, and on constructing a line perpendicular to a given plane, as a rule, reduce to constructing the height of some triangle. In the general case this problem is a metric problem.

Keywords: construction of the perpendicular of the given line, height construction, length ratio, parallel projection, metric construction, diagonal section, remote drawing.

Задачи о построении прямой, перпендикулярной данной прямой, и о построении прямой, перпендикулярной данной плоскости, как правило, сводятся к построению высоты некоторого треугольника. Эта задача в общем случае является задачей метрической, а это означает, что если на изображении задан например треугольник ABC и требуется построить изображение высоты BC этого треугольника, то в принципе нельзя, взяв на основании AC произвольно точку, утверждать, что отрезок BX является изображением высоты. Если не удается выполнить построение высоты, BX используя некоторые особенности заданного изображения, или не удается подметить особенности, позволяющие выполнить это построение, то можно воспользоваться одним из трех излагаемых в этом статье способов. Основой применения каждого из этих способов является свойство параллельного проектирования сохранять отношение длин параллельных отрезков. Другими словами, если в оригинале (т. е. на фигуре Φ_0) точка X_0 делит отрезок A_0C_0 в отношении $A_0X_0 : A_0C_0$, то и на изображении, построенном по правилам параллельного проектирования, точка X , соответственная точке X_0, будет делить соответственный отрезок в таком же отношении, т. е. $AX : \Phi C = A_0X_0 : A_0C_0$.

1-й способ {способ выносных чертежей). Так как все свойства фигур, сохраняющиеся при параллельном проектировании, сохраняются и при более «слабом» преобразовании – преобразовании подобия, то если на фигуре Φ', подобной фигуре Φ_0, точка X' делит отрезок $A'C'$ в отношении $A'X' : A'C'$, то и на изображении, построенном по правилам параллельного проектирования, точка X будет делить отрезок AC в таком же отношении, т.е. $AX := A'X' : A'C'$. Не имея возможности выполнить требуемое метрическое построение на оригинале (на фигуре Φ_0), мы выполняем это построение на фигуре Φ', подобной фигуре Φ_0.

Чертеж, на котором строится фигура Φ' и на котором затем выполняются точно необходимые метрические построения, называют *выносным* чертежом. Итак, на выносном чертеже строится фигура, обязательно подобная оригиналу.

Таким образом, если на изображении задан треугольник ABC и требуется построить изображение его высоты BX, то на выносном чертеже мы построим треугольник $A'B'C'$, подобный оригиналу треугольника ABC . В треугольнике $A'B'C'$ построим (точно) высоту $B'X'$. Затем вернемся к основному чертежу. На стороне AC треугольника ABC построим точку X , такую, которая отрезок разделит в отношении $AX : AC$, равном отношению $A'X' : A'C'$. Соединим в заключение точку B с точкой X и получим отрезок BX – изображение искомого перпендикуляра (или скажем короче: искомый перпендикуляр).

2-й способ (вычислительный). Введя вспомогательный параметр, подсчитаем стороны треугольника ABC , в котором требуется построить высоту BX. Затем подсчитаем отношение, в котором основание этой высоты – точка X разделит сторону AC треугольника. Зная отношение, в котором точка X делит основание AC, с помощью теоремы Фалеса построим эту точку X . Соединив затем точку B с точкой X получим искомое изображение высоты BX (или скажем короче: искомую высоту).

3-й способ (комбинированный). Этот способ является комбинацией первых двух способов. Так, подсчитаем стороны треугольника ABC , в котором требуется провести высоту BX , (как во втором способе), а затем на выносном чертеже построим треугольник по трем (вычисленным) сторонам и на том же выносном чертеже построим (точно) высоту $B'X'$ треугольника $A'B'C'$ (как в первом способе). После этого вернемся к основному чертежу, где на стороне AC построим точку X , такую, что

$AX := A'X' : A'C'$. В заключение соединим точку B с точкой X и получим BX – искомую высоту.

При решении задач этого параграфа (и последующих) нам придется обращаться к следующим четырем элементарным задачам:

Задача 1. Построить оригинал плоской фигуры, заданной на изображении пространственной фигуры.

Замечание. Ради упрощения речи мы говорим о построении оригинала плоской фигуры. Строится же фигура, подобная оригиналу этой плоской фигуры. Аналогично мы будем поступать и в дальнейшем.

Задача 2. Найти отношение, в котором высота треугольника делит его основание.

Задача 3. Разделить данный отрезок в данном отношении.

Задача 4. Построить отрезок $x = a\sqrt{n}$, где a – данный отрезок и $n = 2, 3, 4, \ldots$.

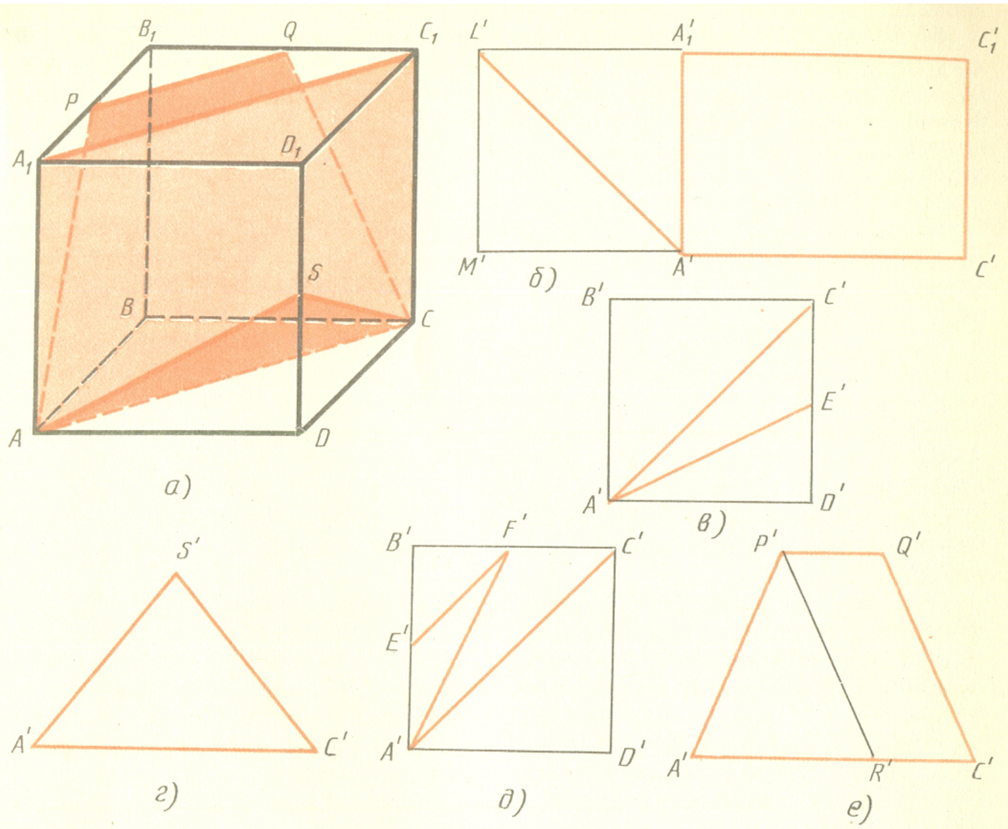

Рис. 1

Чтобы не перегружать дальнейшее изложение повторяющимися подробностями решения этих четырех задач, напомним кратко их решения и далее на эти решения будем ссылаться.

Суть решения задачи 1 поясним на следующем частном примере.

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис.1а). Построим оригиналы следующих фигур:

а) диагонального сечения AA_1C_1C;

б) сечения ASC, где точка S – середина ребра DD_1;

в) сечения $APQC$, где точка P – середина ребра , а точка Q – середина ребра B_1C_1

.

Решение, а) Сечение AA_1C_1C является в оригинале прямоугольником. Выполним построение оригинала этого прямоугольника, как показано на выносном чертеже (рис.1б). А именно построим произвольный квадрат $M'L'A_1'A'$, а затем прямоугольник $A'A_1'C_1'C'$, одной стороной которого является сторона $A'A_1'$ построенного квадрата, а другой стороной – отрезок $A'C'$, равный диагонали этого же квадрата. Прямоугольник $A'A_1'C_1'C'$ и является оригиналом сечения AA_1C_1C.

б) Ясно, что сечение ASC является (в оригинале) равнобедренным треугольником. Для построения этого треугольника обратимся к выносному чертежу (рис.1в). Построим квадрат $A'B'C'D'$. Если одну сторону искомого треугольника взять равной диагонали $A'C'$ этого квадрата, то, как нетрудно убедиться, каждая из двух других сторон треугольника будет равна отрезку $A'E'$, где точка E – середина стороны $C'D'$. Зная все три стороны искомого треугольника, строим этот треугольник $A'S'C'$ (рис.1г).

в) Легко доказать, что сечение $APQC$ является равнобокой трапецией. Для построения оригинала этой трапеции обратимся к выносному чертежу (рис.1д). Не вдаваясь в несложные рассуждения, отметим, что если одно из оснований трапеции-оригинала взять равным диагонали $A'C'$ квадрата $A'B'C'D'$, то другое основание следует взять равным отрезку $E'F'$, т. е. половине диагонали этого же квадрата, а каждую из двух других (боковых) сторон взять равной отрезку $A'F'$. Построение трапеции по четырем сторонам известно. Сначала строится (рис.1е) равнобедренный треугольник $A'P'R'$ со сторонами $A'P' = P'R' = A'F'$ и $A'R' = A'C' - E'F'$. Затем параллельным переносом $\overrightarrow{A'R'}$ отрезка $P'R'$ получаем сторону $Q'C'$ трапеции. Построенная трапеция является оригиналом сечения . (Точнее, она является трапецией, подобной оригиналу сечения . Но мы условились ради краткости речи упоминание о подобии опускать.)

Задача 2. Известны три стороны треугольника ABC: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Найти отношение $AX : AC$, в котором высота BX делит сторону AC. При решении этой задачи мы рассмотрим три случая: а) оба угла при основании AC – острые; б) один из углов при основании AC – тупой; в) один из углов при основании AC – прямой.

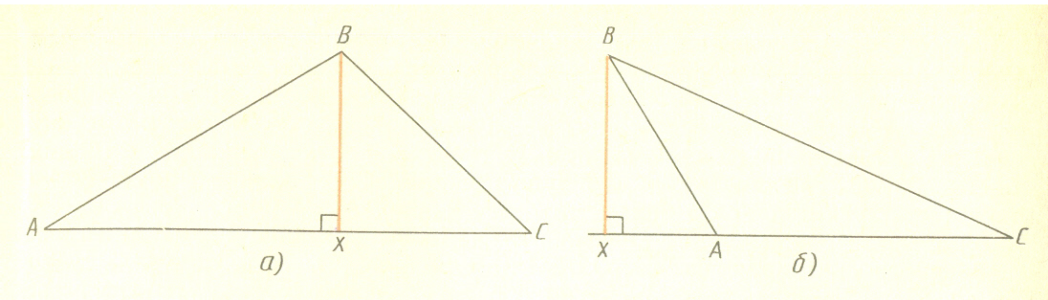

Рис. 2

Решение. а) В этом случае точка X – внутренняя точка отрезка AC и $AC = AX + CX$, откуда $CX = b - AX$ (рис.2а). Выразив дважды BX^2 (из прямоугольных треугольников ABX и BCX), получим уравнение $AB^2 - AX^2 = BC^2 - CX^2$, или $c^2 - AX^2 = a^2 - (b - AX)^2$, откуда находим AX отрезок и затем искомое отношение $AX : AC$.

б) В этом случае точка X – внешняя точка отрезка AC и $AC = CX - AX$ откуда $CX = b + AX$ (рис.2б). Выразив дважды (из прямоугольных треугольников ABX и BCX), получим уравнение $AB^2 - AX^2 = BC^2 - CX^2$, или $c^2 - AX^2 = a^2 - (b - AX)^2$, откуда находим AX и искомое отношение $AX : AC$.

в) Ясно, что в этом случае высота X совпадает с одним из катетов AB или BC. Искомое отношение либо равно нулю, либо не существует.

Задача 3. Построить точку X, делящую данный отрезок AB в отношении $AX : AB = p \cdot q$, где p и q – известные отрезки.

Решение. Через точку A проведем вспомогательный луч l и построим на нем отрезки $AX_1 = p$ и $AY_1 = q$ (рис. 3). Затем построим прямую Y_1B и далее прямую $X_1X \parallel Y_1B$. Полученная таким образом точка X будет искомой точкой. (Отметим, что если отрезки p и q очень малы, то можно на луче l строить отрезки $AX_1 = 2p$ и $AY_1 = 2q$ или $AX_1 = 3p$ и $AY_1 = 3q$ и т.д. Аналогично, если отрезки p и q слишком большие для их построения, можно построить $AX_1 = 0.5p$ и $AY_1 = 0.5q$ и т.д.)

В некоторых случаях для построения оригинала фигуры используется способ, основанный на построении отрезка, заданного формулой.

Напомним решение некоторых частных случаев этой задачи.

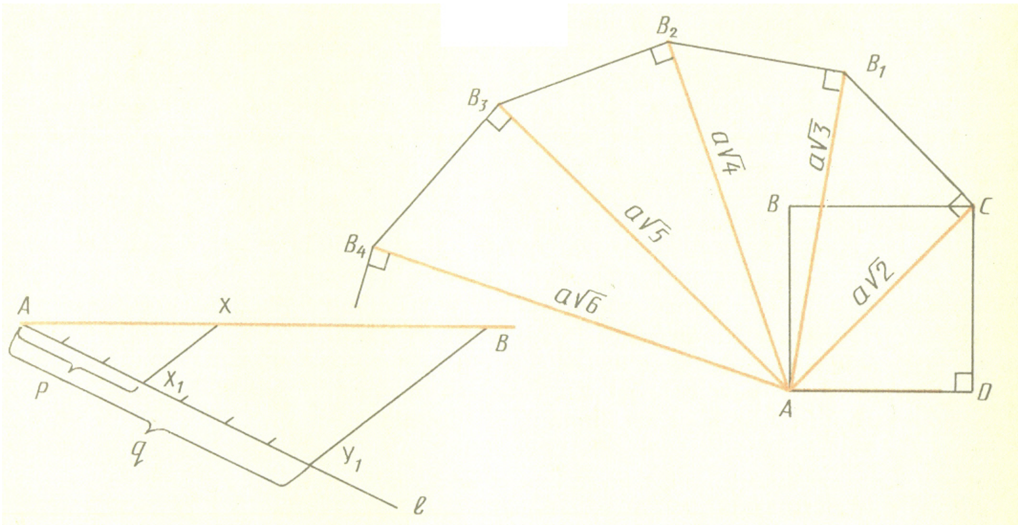

Рис. 3

Задача 4. Дан отрезок a . Построить отрезок $x = a\sqrt{n}$, если $n = 2, 3, 4, \ldots$

Решение. *1-й способ.* Построим квадрат со стороной $ABCD$, равной a (рис. 4). Тогда ясно, что $AC = a\sqrt{2}$. Если далее построить прямоугольный треугольник ACB_1 , у которого $CB_1 = a$, то, как нетрудно подсчитать, $AB_1 = a\sqrt{3}$. Продолжая аналогично построение прямоугольных треугольников AB_1B_2, AB_2B_3, . . . , будем получать отрезки $AB_2 = a\sqrt{4}$, $AB_3 = a\sqrt{5}$, ...

Ясно, что с увеличением рассматриваемый способ построения отрезка х становится все более «затяжным». Поэтому целесообразно воспользоваться каким-нибудь более «коротким» способом.

2-й способ. Если удается представить число n как сумму квадратов натуральных чисел p и , т.е. $n = p^2 + q^2$, то $x = a\sqrt{p^2 + q^2} = sqrt(pa)^2 + (qa)^2$. Это значит, что отрезок x можно построить как гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами, равными отрезкам pa и qa.

3-й способ. Он аналогичен предыдущему способу. Если удается представить число n как разность квадратов двух натуральных чисел, т. е. $x = p^2 - q^2$, то $x = a\sqrt{p^2 - q^2} = \sqrt{(pa)^2 - (qa)^2}$. Это значит, что отрезок x можно построить как катет прямоугольного треугольника, другой катет которого равен qa , а гипотенуза равна pa .

4-й способ. Если удается число n представить как произведение двух натуральных чисел, т.е. $n = pq$, то $x = a\sqrt{pq} = \sqrt{(pa)(qa)}$. Это значит, что отрезок x можно построить как катет прямоугольного треугольника, проекция которого на гипотенузу при $p > q$ равна aq и гипотенуза которого равна ap.

Список литературы

[1] Атанасян Л. С, Дулалаева Т. А., Линькова Г. Н., "О подготовке студентов к преподаванию в классах с углубленным изучением математики", *Математика в школе*, 1991, №4, 9. [Atanasjan L. S, Dulalaeva T. A., Lin'kova G. N. O podgotovke studentov k prepodavaniju v klassah s uglublennym izucheniem matematiki. Matematika v shkole, 1991. no 4. 9.].

[2] Атанасян Л.С. и др., *Геометрия: Учебник для 7—9 классов общеобразовательных учреждений*, Просвещение, М., 1996, 335 с. [Atanasjan L.S. i dr. Geometrija: Uchebnik dlja 7—9 klassov obshheobrazovatel'nyh uchrezhdenij. Moskva. Prosveshhenie, 1996. 335].

[3] Габович И. Г. О поиске планов решения геометрических задач, *Математика в школе*, 1983, № 1, 53-55. [Gabovich I. G. O poiske planov reshenija geometricheskih zadach. Matematika v shkole, 1983. no 1. 53-55].

[4] Мадраимов С., *Самостоятельная работа творческого характера в процессе обучения геометрии в неполной средней школе*, Дис. ...канд. пед. наук, Ош, 1991, 196 с. [Madraimov S. Samostojatel'naja rabota tvorcheskogo haraktera v processe obuchenija geometrii v nepolnoj srednej shkole: Dis. ...kand. ped. nauk. Osh, 1991. 196].

Список литературы (ГОСТ)

[1] Атанасян Л. С, Дулалаева Т. А., Линькова Г. Н. О подготовке студентов к преподаванию в классах с углубленным изучением математики // Математика в школе, 1991.- №4. - С.9.

[2] Атанасян Л.С. и др. Геометрия: Учебник для 7—9 классов общеобразовательных учреждений. - М: Просвещение, 1996. -335 с.

[3] Габович И.Г. О поиске планов решения геометрических задач // Математика в школе, 1983.- №1.-С. 53-55.

[4] Мадраимов С. Самостоятельная работа творческого характера в процессе обучения геометрии в неполной средней школе: Дис. ...канд. пед. наук. -Ош, 1991. - 196 с.

Для цитирования: Эсонов М. М. Построение прямой, перпендикулярной данной прямой // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2017. № 2(18). С. 111-116. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-111-116

For citation: Esonov M. M. Building a straight line perpendicular to a given line, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2017, **18**: 2, 111-116. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-111-116

Поступила в редакцию / Original article submitted: 22.03.2017